Material complementario. Matemática

CURSO DE INTRODUCCIÓN A LOS ESTUDIOS UNIVERSITARIOS 2017

Actividad de Inicio, *problema para pensar*

Diez bolsas con diez monedas

Se tienen 10 bolsas numeradas (del 1 al 10) que contienen 10 monedas cada una. Las monedas son todas iguales en apariencia y, salvo una excepción, todas tienen el mismo peso: 10 gramos. Lo único que se sabe es que *una* de las bolsas contiene monedas que pesan todas un gramo más que el resto. Es decir, las monedas de esta única bolsa pesan 11 gramos en lugar de 10. Se tiene, además, una balanza que mide el peso exacto (bueno, tan exacto como uno necesita para este problema), pero sólo se podrá usar una vez.

El problema consiste en saber qué hacer, con una sola pesada, para determinar en qué bolsa están las monedas que pesan diferente. Se trata de *pensar con creatividad.* Ése es el atractivo particular de este ejercicio.

Matemática estas ahí? (Adrian Paenza)

COMPLEMENTO 1

01 El cero

A una edad temprana hacemos nuestra insegura entrada en la tierra de los números. Aprendemos que el 1 es el primero del «alfabeto numérico», y que introduce los números de conteo 1, 2, 3, 4, 5... que no son más que eso: cuentan cosas reales, manzanas, naranjas, plátanos, peras. No es hasta más tarde cuando podemos contar el número de manzanas que hay en una caja cuando no hay ninguna.

Los antiguos griegos y los romanos, célebres por sus proezas de ingeniería, carecían de una forma eficaz de lidiar con el número de manzanas que había en una caja vacía. Ellos no lograron dar un nombre a la «nada». Los romanos tenían sus formas de combinar I, V, X, L, C, D y M, pero ¿y el 0? Ellos no contaban «nada».

¿Cómo llegó a ser aceptado el cero? Se cree que el uso de un símbolo que designa «la nada» tuvo su origen hace miles de años. La civilización maya, en lo que es ahora México, usó el cero en diversas formas. Algún tiempo después, el astrónomo Claudio Ptolomeo, influido por los babilonios, usó un símbolo semejante a nuestro moderno 0 como marcador de posición en su sistema numérico. Como marcador de posición, el cero se podía usar para distinguir ejemplos (en notación moderna) como 75 y 705, en lugar de basarse para ello en el contexto, como habían hecho los babilonios. Esto se podría comparar con la introducción de la «coma» en el lenguaje: ambos ayudan a *leer* el significado correcto. Pero, así como la coma viene acompañada de un conjunto de reglas para su uso, también tiene que haber reglas para usar el cero.

Brahmagupta trató el cero como un «número», no como un mero marcador de posición, y expuso unas reglas para operar con él. Éstas incluían que «la suma de un número positivo y cero es positiva» y que «la suma de cero y cero es cero». Al pensar en el cero como un número, Brahmagupta fue bastante avanzado. El sistema de numeración hindú-arábigo que incluyó el cero de esta manera fue promulgado en occidente por Leonardo de Pisa, Fibonacci, en su *Liber Abaci* (*Libro* *del ábaco*), publicado en 1202. Instruido en la aritmética hindú-arábiga, reconoció el poder del uso del símbolo adicional 0 combinado con los símbolos hindúes 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9.

El lanzamiento del cero dentro del sistema numérico planteaba un problema del que Brahmagupta se había ocupado brevemente: ¿cómo se habría de tratar a este «intruso»? ¿Cómo podría integrarse el cero en el sistema aritmético de entonces de una forma más precisa? Algunos ajustes eran sencillos. Cuando se trataba de hacer sumas y multiplicaciones, el 0 encajaba perfectamente, pero «el extranjero» no encajaba fácilmente en las operaciones de sustracción y división.

¿Cómo funciona el cero? La adición y la multiplicación con el cero son sencillas y en absoluto polémicas (se puede agregar 0 a 10 para obtener cien, pero nos referiremos a la adición en el sentido menos imaginativo de esta operación numérica). Sumar 0 a un número deja a ese número inalterado, mientras que multiplicar 0 por cualquier número siempre da 0 como solución. Por ejemplo, tenemos $7 + 0 = 7$ y $7 \times 0 = 0$. La sustracción es una operación sencilla pero puede llevar a negativos, $7 - 0 = 7$ y $0 - 7 = -7$, mientras que la división que implica al cero plantea dificultades.

Imaginemos una extensión que se ha de medir con una vara. Suponga que la vara de medir tiene en realidad una longitud de 7 unidades. Nos interesa saber cuántas varas de medir podemos extender a lo largo de nuestra extensión dada. Si la extensión que ha de medirse es en realidad de 28 unidades, la solución es 28 dividido por 7, o, en símbolos, $28 : 7 = 4$. Una notación mejor para expresar esta división es

$$\frac{28}{7} = 4$$

y después podemos hacer una «multiplicación cruzada» para escribir esto en términos de multiplicación, como $28 = 7 \times 4$. Bien, ¿qué podemos hacer con 0 dividido por 7? Para que nos ayude a proponer una solución en este caso, llamemos a a la solución, de manera que

$$\frac{0}{7} = a$$

Por multiplicación cruzada, esto equivale a $0 = 7 \times a$. Si esto es así, el único valor posible para a es 0, porque si la multiplicación de dos números da 0, uno de ellos debe ser 0. Evidentemente ese número no es 7, así que a debe ser un cero.

Ésta *no* es la principal dificultad que entraña el cero. La cuestión peligrosa es la división *por* 0. Si intentamos tratar a 7/0 de la misma manera que lo hacíamos con 0/7, tendríamos la ecuación

$$\frac{7}{0} = b$$

Por multiplicación cruzada, $0 \times b = 7$ y acabamos con el absurdo de que $0 = 7$. Al admitir la posibilidad de que 7/0 sea un número, tenemos grandes posibilidades de provocar un caos numérico de dimensiones colosales. La forma de evitarlo es decir que 7/0 es indefinido. No es permisible encontrar algún sentido a la operación de dividir 7 (o cualquier otro número que no sea cero) por 0, así que simplemente no permitimos que esta operación tenga lugar. De igual modo, no es permisible poner una coma en mitad de una palabra sin degenerar en el absurdo.

El matemático Bhaskara se planteó la división por 0 y propuso que un número dividido por 0 era infinito. Esto es razonable, porque si dividimos un número por un número muy pequeño la solución es muy grande. Por ejemplo, 7 dividido por un décimo es 70, y por un centésimo es 700. Si hacemos que el número del denominador sea cada vez más pequeño, la solución que obtenemos es cada vez más grande. En la máxima pequeñez, el propio 0, la solución debe ser el infinito. Si adoptamos esta forma de razonar, quedamos en situación de tener que explicar un concepto aún más extraño: esto es, el infinito. Enfrentarse al problema del infinito no ayuda; el infinito (con su notación estándar ∞) no se ajusta a las reglas habituales de la aritmética y no es un número en el sentido habitual.

Si 7/0 constituía un problema, ¿qué se puede hacer con el aún más extraño 0/0? Si $0/0 = c$, por multiplicación cruzada llegamos a la ecuación $0 = 0 \times c$ y al hecho de que $0 = 0$. Esto no resulta especialmente esclarecedor, pero tampoco es ningún absurdo. De hecho, c puede ser *cualquier número* y no llegamos a una imposibilidad. Llegamos a la conclusión de que 0/0 puede ser cualquier cosa; en los círculos matemáticos bien educados se le llama «indeterminado».

Considerándolo todo, cuando nos planteamos la división por cero llegamos a la conclusión de que es mejor excluir esa operación de la forma en la que hacemos los cálculos. Podemos hacer aritmética tranquilamente sin ella.

¿Para qué sirve el cero? Sencillamente, no podríamos prescindir del 0. El progreso de la ciencia ha dependido de él. Hablamos de cero grados de longitud, de cero grados en la escala de temperatura, y, de igual modo, de energía cero, y de gravedad cero. El cero ha entrado en el lenguaje no científico con ideas tales como la hora cero y la tolerancia cero.

Pero, podría hacerse un mayor uso de él. Si usted se baja en la acera de la Quinta Avenida de la ciudad de Nueva York y entra en el Empire State Building, se hallará en el espléndido vestíbulo de la entrada de la planta número 1. Con ello se hace uso de la capacidad que tienen los números para ordenar, 1 por «primero», 2 por «segundo» y así sucesivamente, hasta 102 por «centésimo segundo.» En Europa sí que tienen una planta 0, pero existe cierta renuencia a llamarla así.

Todo sobre la nada

La suma de cero y un número positivo es positiva

La suma de cero y un número negativo es negativa

La suma de un positivo y un negativo es su diferencia; o, si son iguales, cero

Cero dividido por un número negativo o positivo, o bien es cero o bien se expresa como una fracción con el cero como numerador y la cantidad finita como denominador

Brahmagupta, 628 d.C.

Las matemáticas no podrían funcionar sin el cero. Éste está en el meollo de conceptos matemáticos que hacen que el sistema numérico, el álgebra, y la geometría funcionen. En la línea de los números, el 0 es el número que separa los números positivos de los negativos y, por consiguiente, ocupa una posición privilegiada. En el sistema decimal, el cero sirve como marcador de posición que nos permite usar tanto números enormes como cifras microscópicas.

A lo largo de cientos de años, el cero se ha ido progresivamente aceptando y utilizando, y se ha convertido en una de las mayores invenciones del hombre. El matemático norteamericano del siglo XIX G. B. Halsted adaptó *El sueño de una noche de verano* de Shakespeare para escribir sobre él como el motor de un progreso que otorga «a la nada impalpable, no solamente un nombre y un espacio de existencia, una imagen, un símbolo, sino también un poder útil, la característica de la raza hindú de la que surgió».

Cuando se introdujo el 0, se debió de considerar algo extraño, pero los matemáticos tienen la manía de aferrarse a conceptos extraños que resultan ser útiles mucho más tarde. El equivalente de ello en la actualidad se da en la teoría de conjuntos, en la que la idea de un *conjunto* es un grupo de elementos. En esta teoría ø designa al conjunto sin ningún elemento, el llamado «conjunto vacío». Ahora esa idea resulta extraña, pero, al igual que el 0, es indispensable.

La idea en síntesis: la nada no es nada desdeñable

Responder:

Cómo llego a ser aceptado el Cero?

Cómo funciona el Cero?

Para qué sirve el Cero?

<u>COMPLEMENTO 2</u>

¿Cuán grandes son los números grandes?

Historia de la vida en un día

Para poder imaginar cuán grandes son los números grandes hace falta compararlos con situaciones que sean significativas para nosotros en la vida cotidiana.

Por ejemplo: para entender la diferencia entre 1 millón y 1000 millones basta ponerlo en segundos. Mientras 1 millón de segundos representa un poco más de 11 días, 1000 millones de segundos representan aproximadamente 32 años.

Decir que hay mucha sangre humana en el mundo es decir algo razonable. Pero si uno pudiera juntarla toda en un recipiente y arrojarla en la superficie del lago Nahuel Huapi, por poner una referencia, sólo elevaría la altura del lago en menos de 5 centímetros. Es decir, o bien hay muy poca sangre humana, o bien hay mucha agua.

A partir de esta idea quiero proponerle un ejercicio mental. Uno sabe que la Tierra tiene aproximadamente 4500 millones de años de edad. Es vieja, sin ninguna duda. Hagamos ahora el siguiente razonamiento: supongamos que uno encoge la vida de la Tierra a un solo día. O sea, imaginemos un segmento de 24 horas, de manera tal que al principio está el comienzo de la Tierra y al final del mismo segmento, a las 12 de la noche, los días actuales. Si así fuera, los dinosaurios no aparecerían hasta las 11 de la noche. Más aún: morirían todos 20 minutos antes de la medianoche. Y el hombre moderno recién empezaría a figurar dos segundos antes de la medianoche.

Lo más increíble es que toda nuestra historia, desde el comienzo de los tiempos (las pirámides incluidas), ocuparía menos de ¡una décima de segundo!

Reformulando la analogía, si uno mirara la historia de la Tierra como inscripta en la longitud de un brazo extendido, toda la historia de los seres humanos figuraría en el canto de una uña. Y si la historia de la Tierra estuviera representada por el monte Everest (la montaña más alta del mundo), su vida (sí, la suya) estaría representada por algo más fino que el grosor de un copo de nieve de la cima. ¿Tenía noción usted de que representábamos tan poco?

<u>Responder:</u>

Hace cuanto años aparecieron los dinosaurios?

Hace cuanto años se extinguieron los dinosaurios?

Hace cuanto años apareció el hombre?

COMPLEMENTO 3

La siguiente tabla muestra información de distancias entre la tierra con la luna y el sol, como así también las medidas de sus radios (considerando que son cuerpos perfectamente esféricos)

	Distancia a la tierra (km)	**Radio (km)**
Sol	149.597.870	139.000
Luna	384.399	1.737
Tierra	0	6.371

Suponiendo que la tierra tiene un diámetro de 30 cm (como la de un baloncesto), determinar la distancias y tamaños del sol y la luna.

EL rascacielos Burj Khalifa (Dubai) que tienen un altura de 830 metros, es considerado el más alto del mundo, cuanto mediría sobre la pelota de baloncesto?