LOS NÚMEROS

La noción de número es antigua como el hombre mismo. Las tribus más primitivas, tanto en tiempos pasados como en la actualidad, disponían de símbolos para contar; pero hasta la edad de bronce no aparecieron sistemas de numeración para manejar números grandes y realizar operaciones entre ellos. El hallazgo de sistemas de numeración está profundamente unido al progreso matemático y cultural de los pueblos.

En la actualidad sigue siendo muy importante conocer los distintos tipos de números, como también dominar las operaciones que se pueden realizar con ellos y sus propiedades, por las espléndidas aplicaciones en problemas técnicos de gran envergadura.

En este capítulo se trabajará con los números ya conocidos. El objetivo es actualizar los conocimientos de los números y sus operaciones. En primer lugar se presenta una síntesis que abarca conceptos básicos relacionados con ellos. Además se proponen actividades de aprendizaje para ejercitar las operaciones y la aplicación de propiedades que se cumplen en ellas.

$$\begin{array}{cr}
1 & =1^2 \\
1+3 & =2^2 \\
1+3+5 & =3^2 \\
1+3+5+7 & =4^2 \\
1+3+5+7+9 & =5^2
\end{array}$$

$$\begin{array}{cr}
1 & =1^3 \\
3+5 & =2^3 \\
7+9+11 & =3^3 \\
13+15+17+19 & =4^3 \\
21+23+25+27+29 & =5^3
\end{array}$$

Contenidos de este Capítulo:
Clasificación de los distintos tipos de números: números naturales (N0), números enteros (Z), números racionales (Q) y números reales (R). Propiedades de N0, Z, Q y R. Interpretación de los números en la recta numérica. El orden en N0, Z, Q y R. Operaciones posibles en N0, Z, Q y R. Propiedades de las operaciones. Problemas con números N0, Z, Q y R

Desde que eras niño has utilizado los números, ya sea para contar, para expresar cantidades y medidas. Primero conociste los números naturales y se te plantearon nuevos interrogantes que pudiste resolver en la medida que conocías otros números.

A continuación haremos una breve revisión de conceptos teóricos sobre los distintos tipos de números que conoces hasta ahora.

I. NÚMEROS NATURALES

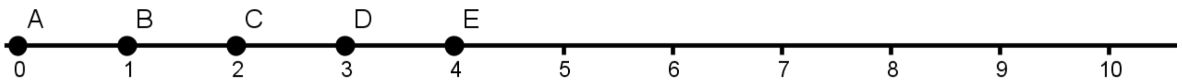
Los números naturales son: 1, 2, 3, 4…..sirven para contar y para numerar. Para expresarlos se usa la letra **N**. En caso que se incluya al 0 se escribe $\mathbf{N_0}$.

<u>Propiedades de N_0</u>

- ✓ Hay infinitos números naturales.
- ✓ El primer número natural es cero. No hay último número natural
- ✓ Todo número natural tiene un sucesor. Un número natural y su sucesor se dicen consecutivos. Ej. : 7 es el sucesor de 6.
- ✓ Todo número, excepto cero, tiene antecesor.
- ✓ Entre dos números naturales existe siempre un número finito de números naturales. Por eso decimos que N_0 es discreto. E.: entre 5 y 9 existen 3 números naturales.
- ✓ $\mathbf{N_0}$está totalmente ordenado por la relación menor o igual. Es decir, dados dos números naturales, que en forma genérica llamamos a y , se verifica necesariamente que: $a< b$ o $a=b$ o $a>b$

<u>Los N_0 en la recta numérica</u>

Como los $\mathbf{N_0}$están ordenados los podemos representar en la recta numérica. Ya sabes que para representar los números en la recta numérica es necesario fijar un origen y un segmento unidad. De esta manera, a cada número natural le corresponde un punto y sólo uno, sobre la recta numérica.



La suma o multiplicación de dos números naturales no da como resultado siempre un número natural, pero: ¿ocurre lo mismo con la resta entre dos número naturales?

Veamos:

7 y 2 pertenecen a $\mathbf{N_0}$; la resta $7 - 2 = 5$; 5 es un número natural

4 y 9 pertenecen a $\mathbf{N_0}$; la resta $4 - 9 =$?no es posible en$\mathbf{N_0}$

La resta no siempre es posible en$\mathbf{N_0}$

Entonces te planteaste:
¿Existen números con los cuales es siempre posible resolver la resta?.

II. NÚMEROS ENTEROS

Podemos decir que con los números enteros se resuelve la imposibilidad de resolver una resta en $\mathbf{N_0}$. Un ejemplo para presentar a los “nuevos números” ayudará a comprender mejor la situación:

<u>El almacén de Doña María</u>

Doña María, dueña de un almacén, es muy confiada. En el mostrador de su negocio hay un cartel que dice “HOY SE FÍA”.

Si vas a comprar al almacén de doña María, te puede ocurrir que tu gasto sea menor, igual o superior al dinero que llevas. En el último caso, le quedas debiendo.

Veamos el cuaderno de anotaciones de doña María en el que aparece una tabla con los datos referidos al dinero que gastó cada cliente, el dinero que llevó para hacer las compras y la situación en que quedó cada uno de ellos.

	Gastó	**Llevó**	**Salió con**	**Quedó debiendo**
Juan	23 $	30 $	7 $	-
Silvia	46 $	50 $	4 $	-
Pedro	100 $	90 $	-	10 $
Esther	456 $	500 $	44 $	-
Carla	90$	100 $	10$	-

La tabla nos informa que cuando Carla sale del almacén <u>tiene</u>10 $ mientras que Pedro <u>tiene una deuda</u> de 10$.

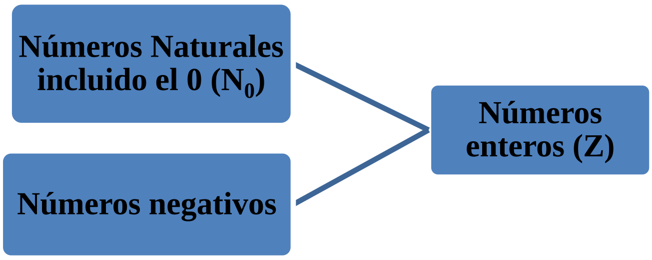
Es fácil pensar en un número que refleje la situación de Carla: el número natural 10. En cambio, el 10 no sirve para expresar la situación de Pedro, ya que no es lo mismo el <u>tener</u> de Carla que el <u>tener una deuda</u> de Pedro.

Esto nos permite pensar que los números con los que hemos trabajado hasta ahora – los números naturales –no alcanzan para reflejar todas las situaciones.

Para expresar la situación de Pedro vamos a usar el - 10

-10 es un número negativo

Los números naturales y sus correspondientes negativos, junto con el 0, forman los números enteros: …-4, -3 , -2 , -1 , 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , …… Para expresarlos se usa la letra **Z**. Así nos queda ahora el campo numérico:



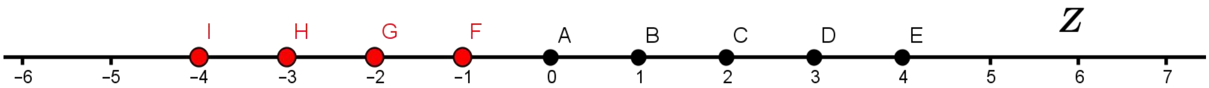
Esto nos permite decir que los números naturales **N** (sin el elemento 0) pueden expresarse también con el símbolo $\mathbf{Z}^+$.

Propiedades de Z

- ✓ Hay infinitos números enteros.
- ✓ No tiene primero ni último elemento.
- ✓ Todo número entero tiene un sucesor y un antecesor. Un número entero y su sucesor o antecesor se dicen consecutivos. Ej.: -2 es el sucesor de -3 o también podemos decir que -3 es el antecesor de -2 ; -2 y -3 son consecutivos.
- ✓ Entre dos números enteros existe siempre un número finito de números enteros. Por ellos decimos que **Z** es discreto.
- ✓ **Z** está totalmente ordenado por la relación menor o igual. Es decir, dados dos números enteros, que en forma genérica llamamos a y b se verifica necesariamente que: a< b o a=b o a>b

Los Z en la recta numérica

Para representar los números enteros sobre la recta numérica fijamos el origen y el segmento unidad, como se hizo para representar en $\mathbf{N_0}$. Luego se ubican los enteros positivos a la derecha de cero y los números negativos a la izquierda de cero.



De la misma manera que en $\mathbf{N_0}$a cada número entero le corresponde un punto y sólo un punto en la recta numérica. Pero la propiedad recíproca no se cumple porque existen infinitos puntos en la recta que no representan ningún número entero. Es decir que los **Z** no completan la recta numérica.

Ahora en **Z** además de poderse sumar y multiplicar, pueden restarse dos números enteros con la seguridad de que el resultado será también un número entero. Pero , ¿ocurre lo mismo con la división dos números enteros?.

Veamos:

8 y 4 son números enteros; la división $8 \div 4 = 2$, 2 es un número entero

7 y 3 son números enteros; la división $7 \div 3 = ?$ no es posible en **Z**

La división no siempre es posible enZ

Entonces te planteaste:
¿Existen números con los cuales es siempre posible resolver la división?

III. NÚMEROS RACIONALES

Para resolver los casos de imposibilidad de la división en **Z**, se crearon los números racionales que se expresan con la letra **Q**.

Entonces:

- ✓ En **Z** : $3 \div 4$ no es posible
- ✓ En **Q** : $3 \div 4 = \frac{3}{4} = 0{,}75$ (decimal exacto)

$$2 \div 11 = \frac{2}{11} = 0{,}181818\ldots\text{. (decimal periódica)}$$

Es decir que aparecen números que tienen la forma $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$; siendo a y b números enteros.

$$\frac{\mathbf{a}\rightarrow}{\mathbf{b}\rightarrow}\quad \begin{matrix}\textbf{numerador}\\ \textbf{denominador}\end{matrix}$$

Estos nuevos números expresan porciones de unidad y se llaman números fraccionarios.

Son números fraccionarios $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{3}{5}$; $\frac{5}{9}$, todos ellos son fracciones de la unidad en el que el denominador es mayor que el numerador. Por ello, son menores a la unidad.

También son números fraccionarios $\frac{11}{2}$; $\frac{20}{3}$; $\frac{13}{5}$, aunque cada uno de ellos equivalga a unidades completas más una fracción de unidad porque el numerador es mayor que el denominador.

$$\frac{11}{2} = \frac{10}{2} + \frac{1}{2} = 5 + \frac{1}{2} = 5\frac{1}{2}$$

$\frac{10}{2}$ es $10 \div 2 = 5$

$5\frac{1}{2}$ es **número mixto** o **fracción mixta** y está compuesto de una parte entera y otra fraccionaria

Regla práctica para pasar una fracción a número mixto

1. Se divide numerador por denominador
2. El cociente es el entero del número mixto
3. El resto es el numerador de la fracción
4. El denominador es el mismo de la fracción dada

$$\begin{array}{r|l} 13 & 5 \\ 3 & 2 \end{array} \qquad \frac{13}{5} = 2\,\frac{3}{5}$$

Más ejemplos: $\frac{20}{3} = \frac{18}{3} + \frac{2}{3} = 6 + \frac{2}{3} = 6\frac{2}{3}$

$$\frac{13}{5} = \frac{10}{5} + \frac{3}{5} = 2 + \frac{3}{5} = 2\frac{3}{5}$$

Los números fraccionarios pueden ser negativos: $-\frac{4}{5}$; $-\frac{8}{3}$; $-\frac{7}{10}$; $-\frac{17}{8}$; $-\frac{23}{10}$. Si es negativo, por ejemplo $-\frac{4}{5}$, teniendo en cuenta que los **Q** pueden pensarse como una división de dos números enteros, puede pensarse a $-\frac{4}{5}$ como $\frac{-4}{5}$ o $\frac{4}{-5}$. Es decir, el numerador negativo o el denominador negativo. Pero recuerda que generalmente es conveniente que el denominador sea positivo.

Por último, además es fácil darse cuenta que si en un número fraccionario el numerador es múltiplo del denominador éste es equivalente a un número entero pero que está "disfrazado" de número fraccionario. Ejemplos: $\frac{8}{4} = 2$; $\frac{27}{3} = 9$; $\frac{5}{5} = 1$; $\frac{0}{16} = 0$

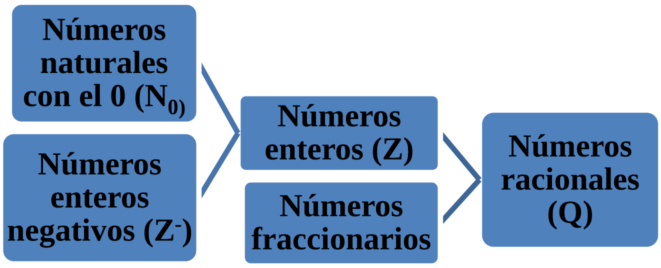
Lo visto hasta aquí permite expresar las siguientes definiciones:

Llamamos fracción a un cociente de números enteros. Todo número que puede ser expresado mediante una fracción $\frac{a}{b}$, donde $b \neq 0$, es un número racional.

La noción de racional proviene de **ración** (parte de un todo)

Todo número entero se puede expresar como número fraccionario.

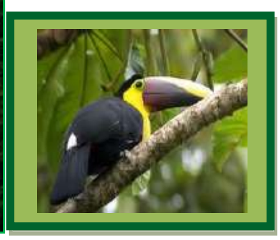
Por lo tanto, los números enteros y los números fraccionarios que no son equivalentes a un número entero forman los números racional es **Q**. Entonces de esta manera nos queda el campo numérico:



A continuación se propone un ejemplo para comprender mejor estos "nuevos números".

<u>Desapariciones anunciadas</u>

En la actualidad la gente ha tomado conciencia de la importancia de la vida silvestre y de su conservación para las generaciones futuras. Sin duda, el mayor reservorio de vida silvestre del planeta se halla sobre todo en las selvas, que ocupan el área cercana al ecuador. Se distribuyen por América tropical, África central, Madagascar, Asia sudoriental hasta nueva Guinea y el norte de Australia.



La selva del continente americano, tal vez la más castigada por la tala y los incendios, ocupa $\frac{5}{9}$ de la superficie total de selvas. Si bien, en número de especies vegetales, la selva americana y la asiática tienen niveles similares, hay una mayor diversidad de especies animales en la primera, y muchas de ellas corren peligro de extinguirse incluso antes de ser descubiertas.

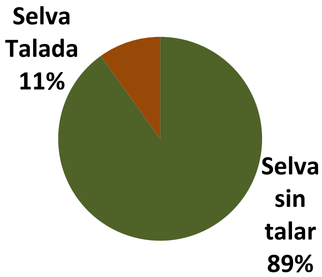
La acción del hombre está provocando una deforestación acelerada que aumenta año a año. Desde 1945, $\frac{2}{5}$ de la superficie total de las selvas del mundo han desaparecido y unos 100 000 km^2 desaparecen anualmente.

Podemos hacer un cálculo aproximado y confeccionar un gráfico circular, que muestre qué parte de la superficie total de selva americana se habrá arrasado, de aquí a diez años, si se mantiene constante promedio de tala anual a nivel mundial.

Selva americana en km^2: 5 170 000 aprox.

Selva, en km^2, que será talada 568 700 aprox.

$$\frac{568\ 700}{5\ 170\ 000} = 0{,}11$$



¿En cuántas décadas perderá la humanidad a la selva tropical si se mantiene constante el promedio de tala anual, en todo el mundo?.

Hagamos algunas interpretaciones de este informe:

- Cuando decimos que la selva americana ocupa $\frac{5}{9}$ de la superficie total de selvas, estamos indicando que si dividimos en 9 partes iguales la superficie total de las selvas del mundo, 5 de esas partes la ocupa la selva americana. En este caso, estamos utilizando la fracción como parte de un todo.

- Si la superficie total de selvas en el mundo es de aproximadamente 9 300 000 km^2, podemos calcular los $\frac{5}{9}$ de ésta y hallar, así, la superficie de la selva americana. En este caso, la fracción $\frac{5}{9}$ funciona como un operador 9 300 000:

$$9\ 300\ 000 \text{ km}^2 \cdot \frac{5}{9} = 5\ 170\ 000 \text{ km}^2$$

- También utilizamos fracciones para calcular porcentajes; que aproximadamente el 11% de la selva americana se perderá en diez años significa que se talarán 11 km^2 de cada 100, en total 568 700 km^2 , de continuar el promedio actual de tala anual.

$$5\ 170\ 000 \text{ km}^2 \cdot \frac{11}{100} = 568\ 700 \text{ km}^2$$

- Que desde 1945 hayan desaparecido $\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}}$de la selva del mundo también se puede expresar diciendo que $\frac{4}{10}$ o $\frac{40}{100}$ o un 40% ha desaparecido.

Para dar a conocer este dato, que es sumamente alarmante, recurrimos a cualquier **fracción equivalente** a $\frac{2}{5}$, y generalmente utilizamos la fracción con denominador 100, es decir **centésimos** o el por ciento, lo cual nos permite visualizar con mayor claridad a qué parte nos referimos.

Dos fracciones, $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$y $\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}}$son equivalentes si, y sólo si, $\mathbf{a.d = b.c}$

Utilizando los datos del informe, se verifica, por ejemplo $\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$; 2. 10= 5.4. ;o bién$\frac{4}{10} = \frac{40}{100}$; 4.100 = 10.40

Las fracciones que tienen como denominador la unidad seguida de ceros se llaman fracciones decimales

Para hallar fracciones equivalentes a una fracción dada, multiplicamos (o dividimos, si la división es exacta) el numerador y el denominador por un mismo número distinto de cero.

Nuevamente tomando los datos del informe: $\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}} = \frac{2.\ \mathbf{2}}{5.\ \mathbf{2}} = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{10}} = \frac{4.\ \mathbf{10}}{10.\ \mathbf{10}} = \frac{\mathbf{40}}{\mathbf{100}}$

- Todos los datos que aparecen en este informe, por ejemplo $\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{9}};\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}}$; 0,11 ; 568 700 , son números que escritos de forma diferente: en forma de fracción (por ej. $\frac{5}{9}$), en forma decimal (por ej. 0,11), o como número entero (por ej. 568 700).

Se podrían escribir todos ellos de una misma forma, por ejemplo de forma decimal y quedan:

❶$\frac{5}{9} = 0{,}55555 \ldots\ldots = 0{,}\hat{5}$

❷$\frac{2}{5} = 0{,}4$

❸$\frac{11}{10}$= 0,11

❹ $\frac{568\ 700}{1} = 568\ 700{,}000\ldots\ldots = 568\ 700{,}\hat{0}$

Todo número racional tiene una expresión decimal, que puede ser exacta o periódica. Podemos hallar la expresión decimal de un número racional a partir de cualquier fracción que lo represente, dividiendo el numerador por el denominador correspondiente.

Las expresiones ❷ y ❸ tienen una cantidad de cifras decimales finitas: son expresiones decimales exactas.

Todo número racional que tiene una expresión decimal exacta puede expresarse como fracción decimal, es decir como una fracción cuyo denominador es una potencia de 10.

Otros ejemplos: $0{,}3 = \frac{3}{10}$ $3{,}25 = \frac{325}{100}$ $24{,}456 = \frac{24456}{1000}$

En las expresiones ❶y ❹, los números 5 y 0 se repiten indefinidamente porque al efectuar las divisiones siempre obtenemos los mismos restos no nulos; éstas son expresiones decimales periódicas.

Otros ejemplos: ❺ $0,\hat{5}$ ❻ $3,\widehat{26}$ ❼ $1{,}2\widehat{43}$

Las expresiones ❺ y ❻ son expresiones periódicas puras porque el período comienza inmediatamente después de la coma; los períodos son 5 y 26. La expresión ❼ es periódica mixta; tiene una parte no periódica (2) y otra periódica.
Estas expresiones periódicas no se pueden transformar en fracción decimal como ocurre con las expresiones decimales exactas.
No vamos a hacer la demostración del pasaje de una expresión decimal periódica a fracción pero sí te recordamos las reglas:

Para obtener una fracción equivalente a un decimal periódico puro, escribimos como numerador el número dado sin coma menos la parte entera y, como denominador, tantos nueves como cifras decimales tenga la parte periódica.

Aplicando la regla en los ejemplos dados nos queda: ❺ $0,\hat{5} = \frac{05-0}{9} = \frac{5}{9}$

❻ $3,\widehat{26} = \frac{326-3}{99} = \frac{323}{99}$

Para obtener una fracción equivalente a un decimal periódico mixto, escribimos como numerador el número dado sin coma menos la parte entera seguida de la parte no periódica y , como denominador, tantos nueves como cifras tenga el período, seguidos por tantos ceros como cifras tenga la parte no periódica.

En la expresión ❼ $1{,}2\widehat{43} = \frac{1243-12}{990} = \frac{1231}{990}$

Llegada a esta instancia del desarrollo de los números racionales, es fácil observar que todo número entero o decimal exacto puede ser escrito como una expresión decimal periódica:

Por ejemplo:	3 = 3, 0000….	(período cero)
	3 = 2,9999…..	(período nueve)
	0,25 = 0,25000….	(período cero)
	0,25 = 0,24999…..	(período nueve)

Como consecuencia de esta observación podemos dar para los racionales la siguiente definción:

Los números racionales (Q) son los números decimales periódicos.

Propiedades de Q

- ✓ El conjunto de número racionales es infinito.
- ✓ No tiene primero ni último elemento.
- ✓ Entre dos números racionales existe siempre un número infinito de racionales. Por ello decimos que el conjunto de números racionales es **denso**.

Por ejemplo: Entre $\frac{2}{4}$ y $\frac{3}{4}$ podemos encontrar tantos racionales como se quiera. Basta convertir $\frac{2}{4}$ y $\frac{3}{4}$ en fracciones equivalentes de denominador mayor.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\mathbf{\frac{2}{4}} & & & & & & & & & & \mathbf{\frac{3}{4}} \\
\downarrow & & & & & & & & & & \downarrow \\
\frac{4}{8} & & & & & \frac{5}{8} & & & & & \frac{6}{8} \\
\downarrow & & & & & \downarrow & & & & & \downarrow \\
\frac{20}{40}, & \frac{21}{40}, & \frac{22}{40}, & \frac{23}{40}, & \frac{24}{40}, & \frac{25}{40}, & \frac{26}{40}, & \frac{27}{40}, & \frac{28}{40}, & \frac{29}{40}, & \frac{30}{40}
\end{array}$$

Y así sucesivamente podemos encontrar más fracciones comprendidas entre $\frac{2}{4}$ y $\frac{3}{4}$ a medida que aumenta el denominador.

En consecuencia:

- ✓ Ningún número racional tiene sucesor ni antecesor.
- ✓ **Q** es totalmente ordenado por la relación $\leq$. Es decir, se cumple que :

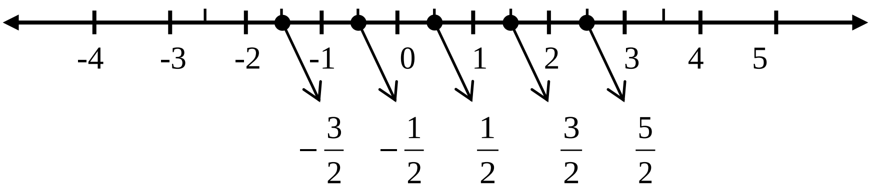
siendo a y b números racionales se verifica: $a < b$; $a = b$; $a > b$

Los Q en la recta numérica

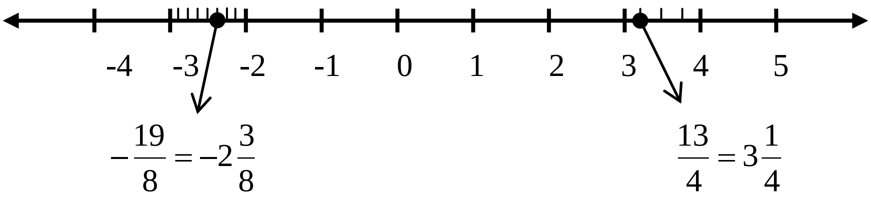
Si sobre la recta numérica fijamos nuevamente un origen y un segmento unidad, a cada número racional corresponde uno y solo un punto sobre la recta numérica.

Recordemos además que el número racional $\frac{a}{b}$ se puede considerar como el cociente que se obtiene al dividir a por b; en donde b indica el número de partes en que se divide la unidad y a es el número de partes que se toman.

De esta manera, por ejemplo, si se divide en dos partes iguales cada segmento unidad en la recta numérica, podemos representar los números racionales cuya representación fraccionaria tiene como denominador 2, como se muestra en el ejemplo siguiente.



Muchas veces, si el número fraccionario tiene el numerador mayor que el denominador, es conveniente transformar el número fraccionario en forma de número mixto, para reconocer rápidamente entre qué números enteros está. Otros ejemplos:



Generalizando el procedimiento descripto anteriormente se puede representar cualquier número racional en la recta numérica.

Entre las propiedades vistas en **Q,** se demostró que **Q** es denso, es decir entre dos números racionales siempre hay infinitos racionales más. ¿Puedes asegurar, entonces, que los racionales completan la recta? O sea: ¿a todo punto de la recta corresponde un número racional? Si te guías por la intuición dirías que sí. Pero ocurre, que también has visto que **el conjunto de los números racionales (Q) es el conjunto de los números decimales periódicos.**

Entonces te planteaste:
¿Existen números con infinitas cifras no periódicas?

¡¡¡Por supuesto que sí!!! Basta imaginar reglas para escribir sucesiones que nos aseguren que las cifras no se repiten periódicamente y escribir dichas sucesiones a partir de la coma.

Ejemplos:

- La sucesión de números naturales después de la coma: 0,1234567891011……….
- O la sucesión de los números pares: 0,2468101214………
- la sucesión de los números impares: 0,135791113……………

Podemos seguir dando más ejemplos porque hay infinitos números decimales de infinitas cifras no periódicas.

Los números de infinitas cifras decimales no periódicas se llaman **números irracionales (I).**

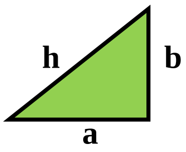
Hemos visto que todo número racional se puede expresar en forma de fracción, es evidente entonces que:

Los números irracionales no se pueden expresar en forma fraccionaria.

Estos números fueron descubiertos por los Pitagóricos, quienes demostraron que la raíz cuadrada de 2 no es un número racional. Por oposición llamaron **irracionales (I)** a estos números.

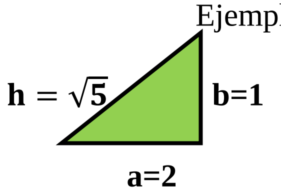
El descubrimiento se originó al aplicar el **Teorema de Pitágoras** que establece que en todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa ("el lado de mayor longitud del triángulo rectángulo") es igual a la suma de los cuadrados de los catetos (los dos lados menores del triángulo, los que conforman el ángulo recto).

Teorema de Pitágoras



$$\mathbf{h}^2 = a^2 + b^2$$

Ejemplo



$$\mathbf{h}^2 = a^2 + b^2$$
$$\mathbf{h}^2 = 2^2 + 1^2$$
$$\mathbf{h} = \sqrt{5}$$

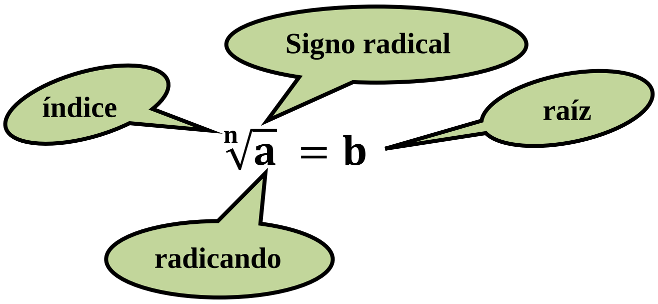
Más tarde se demostró la siguiente propiedad:

Si la raíz cuadrada de un número entero no es otro número entero, entonces es un número irracional.

Esta propiedad se generaliza a raíces de otros índices. Ejemplos:

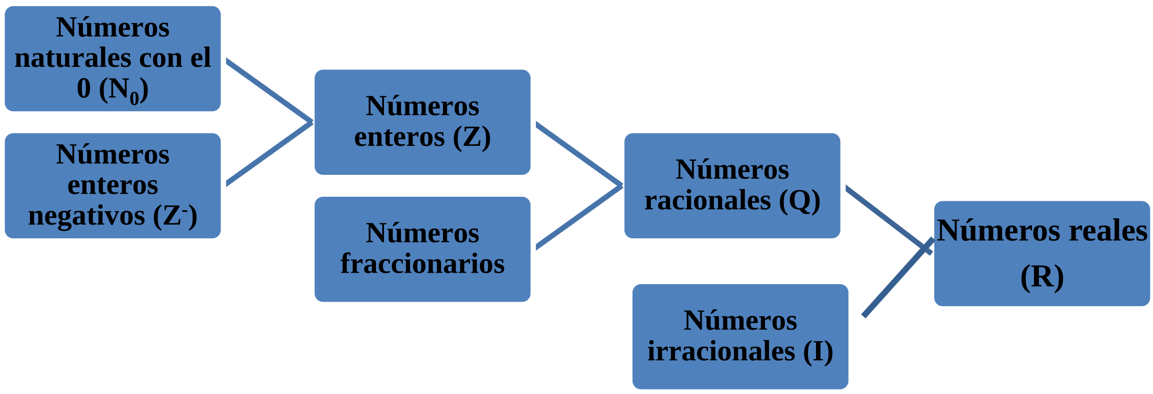
Son números enteros	**No son números enteros** ↓ **Son números Irracionales**
$\sqrt{1}$ $\sqrt{9}$ $\sqrt{25}$ $\sqrt[3]{8}$ $\sqrt[4]{16}$ $\sqrt[3]{27}$	$\sqrt{2}$ $\sqrt{5}$ $\sqrt{7}$ $\sqrt[3]{4}$ $\sqrt[3]{9}$ $\sqrt[5]{13}$

En estos casos se expresan los números irracionales a través de radicales, cuyas partes se denominan:



Además de los números irracionales provenientes de raíces, existen otros, como por ejemplo el muy conocido por sus aplicaciones número $\pi = 3{,}1415926535....$

Los números racionales (**Q**) y los irracionales (**I**) forman los números reales (**R**). Entonces el campo numérico se amplía y nos queda:



Propiedades de R

En **R** se cumplen todas las propiedades de **Q**.

- ✓ Es infinito
- ✓ No tiene primero ni último elemento
- ✓ Entre dos números reales existe siempre un número infinito de números reales. Por ello **R** es denso.
- ✓ Ningún número real tiene antecesor ni sucesor
- ✓ **R** es totalmente ordenado por la relación $\leq$

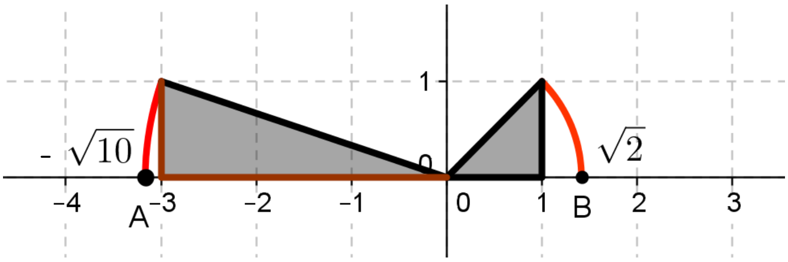
Los R en la recta numérica

Al estudiar los números racionales creíste que con ellos se completaba la recta. Pero luego descubriste que existen otros números, llamados **irracionales**, que también están representados en la recta. Entonces advertiste que con los racionales en la recta numérica quedan "agujeros" o "lagunas", es decir, hay puntos de la recta a los cuales no corresponde ningún número racional. Por tanto, la recta racional no está completa pues hay puntos a los cuales no corresponde ningún número racional

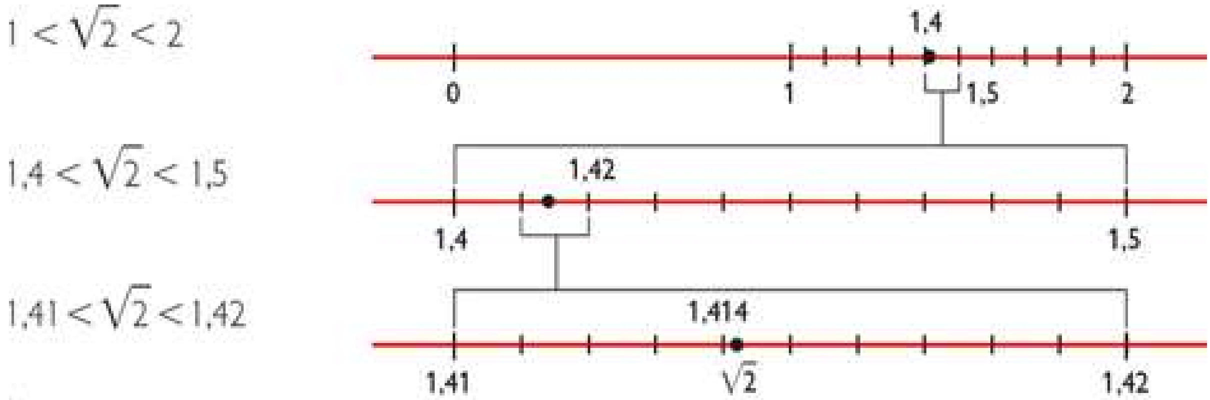
En cambio, el conjunto de los números reales formado por los racionales y los irracionales es **denso** pero sin agujeros. Decimos que el conjunto de números reales es **continuo.** En consecuencia:

Los números reales **completan la recta numérica**. A todo número real corresponde un punto de la recta. A todo punto de la recta corresponde un número real.

Para representar en la recta real números irracionales expresados en forma radical con índice par, se puede utilizar el Teorema de Pitágoras. Ejemplos $-\sqrt{10}\ y\ \sqrt{2}$



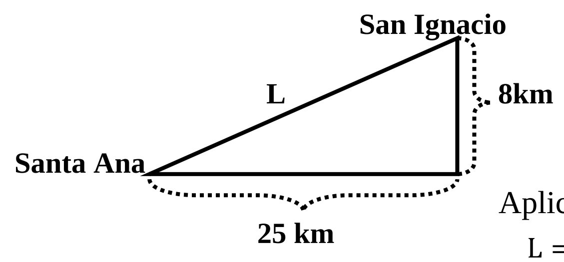
También se puede representar por aproximación, considerando intervalos numéricos en los que se encuentra el número irracional:



En caso que no fuera un radical con índice 2, por ejemplo $\sqrt[3]{7}$, se recurre a su expresión decimal $\sqrt[3]{7} = \mathbf{1,9129311827723892} \ldots \ldots \ldots \ldots$ .Para poder graficar este número irracional nos vemos en la necesidad de aproximar. Para comprender mejor, entonces primero recordaremos a través de un ejemplo cómo se aproximan números decimales y luego continuaremos con la representación de números reales en la recta numérica.

<u>Ejemplo</u>:

En una región se están asfaltando caminos que unirán dos localidades. Indiquen qué longitud tendrá uno de los caminos, de acuerdo con los datos del dibujo.



Aplicando el Teorema de Pitágoras, el valor de L:

$$L = \sqrt{25^2 + 8^2} \Rightarrow L = \sqrt{689}\text{km} \Rightarrow L \cong 26{,}25\text{km}$$

Un número puede ser aproximado por truncamiento o por redondeo.

Para truncar un número decimal en una cifra determinada, se eliminan todas las cifras que le siguen y se las reemplaza por cero.

Ejemplos:
Truncamos los números a partir de los centésimos:

5,746 ≅ 5,74	10,43434343….≅ 10,43	1,41521356…..≅ 1,41

Para redondear un número decimal, debemos tener en cuenta lo siguiente: si la primera cifra para eliminar es menor que 5, se suprimen todas las cifras a partir de ella. En cambio, si la primera cifra para eliminar es mayor o igual que 5, sumamos 1 a la cifra anterior.

Ejemplos:
Redondeamos los números a partir de los centésimos:

5,746 ≅ 5,75	10,43434343….≅ 10,43	1,41421356…..≅ 1,42

La aproximación más utilizada es por redondeo y, salvo indicación específica, es la que emplearemos.

Seguramente ahora te estarás preguntando:
¿Existe un nuevo conjunto numérico para resolver las raíces de índice par y radicando negativo? Y si existe, ¿cómo representamos sus elementos si la recta numérica se ha completado con los reales?. Las respuestas a estas preguntas la dejamos para otro curso.

EJERCITACIÓN

1. Resolver aplicando las reglas de supresión de paréntesis.
   a. $5+4-(3+1)=$
   b. $4+[10-(5+1)]=$
   c. $\{81+[(2-4)-1]+9\}-2=$
   d. $(3-1)+[4-(1+3-8)]=$
   e. $\{[(8-3)+4]-8\}+16=$

2. Suprimir paréntesis, corchetes y llaves; y efectuar las operaciones indicadas. Reducir los términos opuestos.
   a. $12-(4-5)+2+(-7+4-1)-6=$
   b. $5+[2-(4+5-3)+6]-1-(3+5)=$
   c. $-\{-2+[9-(6-2)]+7-[4-(-7+5)-1]\}+3=$

3. Resolver los siguientes ejercicios combinando las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división de números enteros.
   a. $5-\{1+4(2-3+1)-[-(3+1)]-(-2)\}=$
   b. $10+(3+6-12):3-[2(3-4)-5(-2)]=$
   c. $-4+(-5+2-1).2-(-5-10-25):5=$
   d. $4-[60:(12-2+5)+(-2+5)(-2)-12:(6-4)]=$

4. Resolver las siguientes operaciones combinadas con números enteros. Potenciación y radicación.
   a. $-2^2(3-5)+2[3^2-4(-2)+9:(-3)]-(-4)^3:(-2-6)=$
   b. $-\sqrt[3]{-24-3}-(1+5)^2-5^2+\sqrt{10^4}:2=$
   c. $(-2)^2(-2)(-2)^3+(-3)^6:(-3)^3+[(-1)^3]^2=$
   d. $(-5)^7:(-5)^3:(-5)+\{[(-5)^2]^0\}^4-(-5)(-5)^2=$
   e. $\sqrt[4]{2^3:2}-\sqrt[5]{(-2)^6:(-2)}+\sqrt[3]{(-4)^2.(-4)}=$

5. Fundamentar por qué los siguientes números pertenecen a **Q**
   a) 0 b) -5; c) 1,5 d) 1, 3333…..

6. Utilizando diagramas rectangulares representar las siguientes fracciones
   a)$\frac{2}{3};\frac{5}{4};\frac{4}{6};\frac{4}{5}$ b) $\frac{1}{2},\frac{3}{4},\frac{2}{5},\frac{4}{3},\frac{5}{2},\frac{4}{4}$

7. Representar en un mismo grafico los siguientes pares de fracciones a) $\frac{3}{4}$ y $\frac{6}{8}$ b) $\frac{1}{3}$ y $\frac{3}{9}$

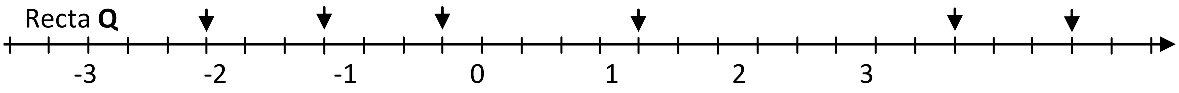
¿Qué puede decir de las fracciones? ¿Cómo se obtiene una respecto de la otra?

8. Formar pares de fracciones iguales con las siguientes: $\frac{6}{9},\frac{25}{15},\frac{4}{9},\frac{2}{4},\frac{4}{8},\frac{10}{6}$

9. Expresar la fracción correspondiente a la zona sombreada:


Suponiendo que el entero de la primer figura posee una superficie de 10000 m^2. ¿Cuántos m^2 representa la parte sombreada?

10. Expresar las fracciones que corresponden a los lugares indicados



11. Simplificar cada una de las siguientes fracciones:

$$\frac{72}{60}\ ;\ \frac{81}{54}\ ;\ \frac{144}{600}\ ;\ \frac{360}{90}\ ;\ \frac{147}{245}\ ;\ \frac{225}{75}\ ;\ \frac{120}{840}\ ;\ \frac{36}{108}\ ;\ \frac{640}{896}\ ;\ \frac{675}{1260}$$

12. Escribir:

a) Una fracción equivalente a $\frac{2}{5}$ que tenga por numerador 6.
b) Una fracción equivalente a $\frac{4}{10}$ que tenga por numerador 10.
c) Una fracción equivalente a $\frac{9}{15}$ que tenga por denominador 10

13. Que fracciones representan:
a) 10 m2 de 450 m2 b) 150 g de 1kg c) 5 km de 7500 m

14. Escribir en orden decreciente los siguientes números

a) $\frac{3}{8}\ ;\ \frac{3}{5}\ ;\ \frac{3}{7}\ y\ \frac{3}{4}$
b) $\frac{7}{15}\ ;\ \frac{11}{15}\ ;\ \frac{8}{15}\ y\ \frac{1}{15}$
c) $\frac{1}{2}\ ;\ \frac{3}{7}\ ;\ \frac{8}{9}\ ;\ \frac{4}{5}\ y\ \frac{3}{11}$
d) $\frac{1}{2}\ ;\ -2\ ;\ -\frac{1}{7}\ ;\ \frac{3}{4}\ ;\ -\frac{5}{6}\ ;1\ y\ 0$
e) $\frac{1}{9}\ ;\ -2\ ;\ -\frac{1}{3}\ ;\ -\frac{2}{5}\ ;\ -\frac{4}{7}\ ;\frac{1}{2}\ y-1$

15. Representar en la recta numérica

a) $\frac{7}{2}\ ;\ \frac{3}{5}\ ;\ \frac{1}{2}\mathrm{de}\frac{4}{5}\ ;-2\ \frac{1}{4}\ ;\sqrt{2}\ ;\ \sqrt{3}-1$
b) $\frac{5}{2}\ ;\ \frac{2}{5}\ ;\ \frac{1}{3}\mathrm{de}\frac{6}{7}\ ;\ 4\ \frac{1}{3}\ ;\ \sqrt{5}\ ;\ 2-\sqrt{3}$
c) $\frac{9}{2}\ ;\ \frac{2}{3}\ ;\ \frac{1}{4}\mathrm{de}\frac{8}{9}\ ;\ -3\ \frac{1}{4}\ ;\ \sqrt{7}\ ;3-\sqrt{5}$

16. Obtener la expresión decimal de las siguientes fracciones y clasificar dichos números

a) $\frac{5}{6}=$ b) $\frac{6}{5}=$ c) $\frac{1}{9}=$ d) $\frac{11}{15}=$ e) $\frac{41}{18}=$ f) $\frac{7}{5}=$

17. Obtener las fracciones irreducibles asociadas a los siguientes números decimales

a)$0{,}6$ b) $0,\hat{9}$ c)$2{,}0\widehat{05}$ d)$2,15$ e) $0{,}2\hat{3}$f)$1,\hat{3}$ g) $1{,}2\hat{3}$h) $1,\hat{6}1{,}75$ i) $2,\hat{3}$k)$1{,}08\hat{3}$ l)$2{,}125$ m)$1{,}1\hat{6}$ n) $1{,}91\hat{6}$ñ) $0,\widehat{12}$o) $0,75$ p) $0{,}5$ r) $0,\hat{3}$ s)$2,\widehat{45}$ t) $0{,}2\hat{3}$ u) $4,\hat{2}$ v)$0{,}37\hat{2}$

18. Escribir en forma de fracción ordinaria las siguientes expresiones decimales periódicas
    a. $0{,}481481\ldots$ =
    b. $0{,}272727\ldots$ =
    c. $3{,}119119\ldots$ =
    d. $0{,}34545\ldots$ =
    e. $0{,}09191\ldots$ =
    f. $5{,}61717\ldots$ =
    g. $0{,}0\widehat{302}$ =
    h. $1{,}50\widehat{48}$ =
    i. $0{,}9\widehat{143}$ =

19. Reducir a común denominador las siguientes fracciones
    a) $\frac{1}{5}\ ;\ \frac{2}{3}\ \ y\ \frac{5}{2}$
    b) $\frac{7}{11}\ ;\ \frac{3}{4}\ \ y\ \frac{5}{6}$
    c) $\frac{3}{7}\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ \frac{2}{5}\ y\ \frac{3}{14}$
    d) $\frac{1}{6}\ ;\ \frac{4}{9}\ ;\ \frac{2}{3}\ y\ \frac{8}{15}$
    e) $\frac{5}{7}\ ;\ \frac{11}{30}\ ;\ \frac{11}{2}\ ;\ \frac{9}{14}\ y\ \frac{9}{10}$

20. Resolver las siguientes operaciones combinadas con números racionales.
    a. $\frac{4}{5}-\left(\frac{2}{3}+1\right)-\left[\frac{4}{3}-\left(-\frac{4}{5}-2+\frac{1}{3}\right)-3\right]=$
    b. $\frac{2}{3}+\left(\frac{4}{5}-\frac{1}{2}\right):\frac{3}{4}-\left(-2+\frac{1}{3}\right).\frac{4}{5}-\left(-\frac{1}{5}\right)=$
    c. $\left(\frac{1}{2}+1\right)^2-\left(3+\frac{2}{3}\right)-\left(-\frac{1}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{2}-2\right)^3+\left(\frac{1}{3}\right)^3=$
    d. $\frac{1-\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}+\frac{\frac{3}{2}-1}{2-\frac{1}{4}}=$
    e. $\frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{4}{3}\right)^2}{3\left(1-\frac{1}{12}\right)}+\frac{7}{9}=$
    f. $\frac{\left(1-\frac{3}{2}\right)^2(-2)^3}{\frac{-5+3}{(-2)3}}=$
    g. $\left[\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}-\frac{4+\frac{1}{5}}{\frac{14}{5^2}}\right]^2=$
    h. $\frac{\left(2-\frac{3}{4}\right)^2-3}{\left(\frac{1}{3}+4^2\right)^{-1}}.\left(2-\frac{1}{4}\right)^{-2}:\left(-\frac{3}{5}-4\right)=$
    i. $\frac{\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^3.\left(\frac{2}{3}\right)^{-7}}+\frac{5}{4}}{1-\sqrt[10]{\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}:\left(\frac{1}{4}\right)^3}}=$

21. Resolver los siguientes ejercicios operando con números decimales.
    a. $(0{,}1-1)^{-2}$
    b. $(0{,}2^2-0{,}1^3):0{,}3+(2-1{,}4)^2-0{,}3^2=$
    c. $\frac{\sqrt[3]{-1+0{,}875}}{[(0{,}2)^2]^{-1}}=$

d. $\frac{(0{,}5.0{,}1-1{,}55)^2}{0{,}75-1} =$

e. $\left[\frac{1+0{,}2:0{,}01}{1-(0{,}5)^2} - 1{,}6: \sqrt[2]{0{,}04}\right]^2 =$

22. Resolver

a. $1{,}333\ldots - 0{,}0666\ldots - 0{,}303030\ldots + \frac{2}{5} - \frac{4}{11} =$

b. $\left(\frac{3}{5} - 0{,}05454\ldots\right)^{-1} - 0{,}4.0{,}1.5 =$

c. $\sqrt[4]{\frac{1}{81}} : (0{,}3^{-3}.0{,}3^{5})^{-1} =$

d. $\frac{0{,}5-0{,}75}{5-\frac{\frac{4}{5}+3}{\frac{1}{2}}}.13 =$

e. $\frac{0{,}25+\frac{1}{2}-\frac{5}{8}}{\frac{\frac{1}{5}-\frac{3}{4}}{\frac{1}{16}}}.\left(\frac{2}{5} + 1{,}2\right) =$

f. $\frac{0{,}333\ldots\left[1+\frac{-3}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}\right]}{2\left[0{,}5+\frac{3}{(-0{,}5)^2}\right]} : \frac{1-\frac{1}{2-\frac{1}{2}}}{2+\frac{\frac{2}{3}}{2-\frac{2}{3}}} =$

g. $\frac{\sqrt{1-\frac{3}{4}:0{,}5+\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}}{\sqrt{\frac{5}{18}}.\sqrt{\frac{5}{2}-\left(1-\frac{2}{3}\right)^2}}.\sqrt{1\,\frac{69}{100}} =$

23. Problemas:

a) Tres personas desean repartir 180 libros, 240 juguetes y 360 chocolatines, respectivamente, entre un cierto número de niños, de tal modo que cada uno reciba un número exacto de libros, de juguetes y chocolatines. ¿Cuál es el mayor número de niños que puede beneficiarse de esa forma?

b) Un Jardinero desea colocar 720 plantas de violetas, 240 de pensamientos, 360 de Jacintos y 480 de jazmines en el menor número de canteros que contengan el mismo número de plantas, sin mezclar las mismas. ¿Qué cantidad de plantas debe cantear en cada cantero?¿ Cuantos canteros hay?

c) Dos ruedas dentadas se engranan una sobre otra, la primera tiene 48 dientes y tarda 4 segundos en cada vuelta, la segunda tiene 104 diente. Se las pone en movimiento se pregunta al cabo de cuánto tiempo se encontraran en la misa posición que al comenzar.

d) Se quieren alambrar un terreno en forma trapezoidal tal que sus lados respectivamente, de: 320 m, 104 m, 396 m y 84 m, deseando que los postes resulten equidistantes y que en cada esquina haya un poste. ¿Cuál es la máxima distancia a que puede colocarse y, en tal caso, cuantos postes se necesitan?.

e) Facundo ha recorrido, en su paseo, dos quintas partes del camino que tiene una longitud total de 8 km. ¿Cuánto le falta para llegar al final?

f) Se pintó de verde la tercera parte de una pared, la mitad de lo que queda de azul y un quinto del resto de naranja. Determinar que parte de la pared:

1) No se pintó todavía. 3) Está pintada de naranja.

2) Se pintó. 4) Está pintada de azul.

Sugerencia: realizar un gráfico de barras

g) El propietario de un terreno ha decidido venderlo en parcelas para obtener una mejor rentabilidad. Vendió primero 3/7 del mismo, luego la mitad de lo restante y todavía le quedaron 244 m2 sin vender. Calcular la superficie del terreno

h) Hallar la fracción igual a 5/7 cuyo denominador sea 49.

i) Si el producto de los $^3/_5$ de un númeropor los $^5/_9$ del mismo es 48, ¿cuál es el número?

j) ¿Cuántos minutos hay en $^1/_{20}$ de una hora?. ¿Cuántos centímetros hay en $^3/_4$ de un metro?

k) Las dos terceras partes de una suma de dinero más $^1/_5$ de la misma es igual a 18000 $. ¿Cuál es la suma total?

l) ¿Cuántos litros hay que sacar de un tanque de 560 litros para que queden en el $^6/_7$ del contenido?

m) Una empresa se propone efectuar una obra en tres etapas. La primera de ellas realiza las 3/8 partes del todas de la obra y en la segunda las 2/5 partes. ¿Qué parte de la obra deberá realizar en la tercera parte?

n) De una determinada pieza se vendió $\frac{2}{9}$y luego una parte igual a los $\frac{5}{6}$ de lo anterior. Si aún quedan 80 metros , ¿ Cuál era la longitud de la pieza?.

o) De una pieza se ha vendido la quinta parte del total y luego 3/4 de lo que restaba. ¿Qué parte ha quedado sin vender? ¿Cuántos metros quedan sin vender si la pieza tenía 60 m?

p) ¿Por qué número se multiplica $\frac{5}{6}$ cuando se convierte en $2\,\frac{3}{7}$?

q) ¿Qué parte de $\frac{5}{6}\ es\ \frac{2}{7}$?

r) Después de vender los $\frac{3}{4}$ de un rollo de alambre y 30 cm más, queda $\frac{1}{6}$ del alambre que había l principio. ¿Cuál era la longitud del rollo de alambre antes de vender nada?

s) En un terreno rectangular de 50 m de frente por 120 m de fondo se desea construir un galpón cuyas dimensiones, largo y ancho, sean iguales al 50 % del frente y del fondo respectivamente.

   1) ¿Qué porcentaje y fracción del terreno ocupará el galpón?

   2) Si la ¾ parte de lo que queda disponible se quiere usar para plantar árboles frutales. ¿Qué porcentaje y fracción del terreno representará el frutal?

   3) ¿Qué parte y porcentaje no estará ocupado por el galpón ni tendrá árboles frutales?

t) La Escuela Provincial ***Los Arbolitos*** posee dos divisiones, A y B, de 30 y 35 alumnos respectivamente, en la cual se tomó un mismo examen de Biología. En la división A 24 aprobaron y en la división B 7 desaprobaron. ¿En qué curso hubo mayor proporción de aprobados? Resolver gráfica y analíticamente.

u) Un productor rural posee 100 ha distribuidas de la siguiente manera: 10 ha potreros; 15 ha producción de tabaco; 16 ha cultivos anuales y bianuales varios; 15 ha reforestaciones, 5 ha afectada a caminos, cursos de agua e infraestructuras varias y lo restante corresponde monte degradado de unos 20 años de edad. Expresar que fracción representa cada sector de la chacra.

24. Completen la siguiente tabla, colocando una cruz en las columnas correspondientes a los conjuntos numéricos a los que pertenece cada número:

Número	**N**	**Z**	**Q**	**I**	**R**
2,254125					
-1,121212					
8					
-100000					
$2{,}3 \cdot 10^3$					
$\left(\sqrt{2}\right)^4$					
$\sqrt[5]{27}$					
$\frac{5}{12}$					
$-\frac{4}{2}$					
$\sqrt{2}+2$					
$-\frac{\sqrt{5}}{2}$					

25. Decidan si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y justifiquen sus respuestas:
   a. Todo numero racional tiene una expresión decimal finita

…………………………………………………………………………………………...

   b. Todo numero irracional tiene una expresión decimal finita

…………………………………………………………………………………………...

   c. Todo numero racional tiene una expresión decimal finita o periódica

…………………………………………………………………………………………...

   d. Todo numero irracional tiene una expresión decimal infinita

…………………………………………………………………………………………...

26. Ubiquen en la recta numérica los siguientes número reales:

$$\sqrt{7},\ \sqrt{4},\ -\sqrt{3}+1,\ \sqrt[3]{8},\ \sqrt{17},\ -\sqrt{19},\ \frac{\sqrt{8}+1}{2}$$

27. Sea en conjunto de todos los números $x \in \boldsymbol{R}$, tales que $x^2 < 2$:

a. Encuentren, si existen dos números naturales pertenecientes a **A.** ¿Cuántos números naturales pertenecen a **A**? ¿Por qué?

……………………………………………………………………………………………..…

……………………………………………………………………………………………...

b. Encuentren, si existen, dos número enteros pertenecientes a **A**. ¿Cuántos números enteros pertenecen a **A**? ¿Por qué?

……………………………………………………………………………………………..…

……………………………………………………………………………………………...

c. Encuentre cinco números racionales que pertenezcan a **A.**

……………………………………………………………………………………………..…

……………………………………………………………………………………………...

d. Encuentren un número irracional que pertenezca a **A**.

……………………………………………………………………………………………..…

……………………………………………………………………………………………...

e. ¿Cuántos números reales hay en **A**? ¿Por qué?

……………………………………………………………………………………………..…

……………………………………………………………………………………………...

f. Escriban el conjunto **A** en forma de intervalo.

……………………………………………………………………………………………..…

……………………………………………………………………………………………...

g. Marquen los elementos de **A** en la recta numérica.

28. Escriban como intervalos y marquen en la recta numérica los números **x** que verifican:

a. Son mayores o iguales que $\sqrt{2}$ y menores que 10.

b. Su doble disminuido en tres unidades es mayor o igual que 5.

29. Escribir tres números decimales no periódicos.

30. Prueba que $\sqrt[3]{4}$ es irracional.

31. Resuelve:

a) $+\sqrt[4]{16}$
b) $\sqrt[3]{-8}$
c) $-\sqrt[5]{-32}$
d) $\sqrt{-1}$
e) $-\sqrt{25}$
f) $\pm\sqrt[6]{\frac{1}{64}}$
g) $-\sqrt[3]{27}$
h) $\sqrt[6]{-64}$

32. Indicar si las operaciones son correctas o incorrectas.

a) $\sqrt{4\,.\,9} = 2\,.\,3 = 6$
b) $\sqrt{25+144} = 5+12 = 17$
c) $\sqrt[3]{729-216-1} = 9-6-1 = 2$
d) $\sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \frac{1}{2}$
e) $\sqrt{-16}\,.\sqrt{-25} = \sqrt{(-16)\,.\,(-25)} = \sqrt{400} = 20$

En el caso que respondas **incorrecta,** indica la forma correcta de resolverla.

33. Realiza las siguientes adiciones y sustracciones.

a) $\sqrt{2} + 3\sqrt{2} =$
b) $\sqrt{3} + \sqrt{9} + \sqrt{27} + \sqrt{81} =$
c) $\sqrt{50} + 4\sqrt[6]{125} - 5\sqrt[6]{8} + 2\sqrt{20} =$
d) $\sqrt[3]{a^5} + \sqrt[3]{a^4} - a\sqrt[3]{a^2} + a\sqrt[3]{a} =$
e) $2\sqrt[3]{4} + 3\sqrt[9]{64} - 4\sqrt[6]{16} =$

34. Realiza las siguientes multiplicaciones.

a) $\sqrt[3]{a^2}\,.\,\sqrt[3]{ab^2} =$
b) $\sqrt[4]{ab^2}\,.\sqrt{a^2b} =$
c) $\sqrt{8}.\,\sqrt[3]{2} =$
d) $\sqrt[4]{a^3x}\,.\,\sqrt[4]{ax^3} =$
e) $\sqrt[3]{a^2}\,.\,\sqrt[6]{a^2b^3}\,.\sqrt{b} =$
f) $\sqrt[5]{16}\,.\sqrt{32} =$

35. Racionalizar las siguientes expresiones.

a) $\frac{2}{\sqrt[3]{a^4.b}} =$
b) $\sqrt[5]{\frac{2a^2}{b^3}} =$
c) $\frac{3a}{\sqrt{\frac{1}{3}}} =$
d) $\frac{\frac{1}{2}x}{\sqrt[3]{a^{-4}}} =$
e) $\frac{-2\sqrt[4]{\frac{a^3}{2}}}{\frac{2}{3}} =$

f) $\frac{\sqrt[4]{\frac{3}{4}a^{-1}}}{\sqrt[4]{\frac{3}{2}b^{-3}}} =$

36. Realiza las siguientes divisiones aplicando la definición, siendo a y x reales positivos.
   a) $\frac{\sqrt[3]{x^2a}}{\sqrt[3]{x}} =$
   b) $\frac{\sqrt[3]{a^4}}{\sqrt{a}} =$
   c) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} =$
   d) $\frac{\sqrt{32}}{\sqrt[3]{4}} =$
   e) $\frac{\sqrt[3]{2}\,.\,\sqrt{4}}{\sqrt[6]{8}\,.\,\sqrt[3]{4}} =$

37. Realiza las siguientes divisiones racionalizando. (a, b y c son reales positivo)
   a) $\frac{2}{\sqrt{2}} =$
   b) $\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt[3]{5}} =$
   c) $\frac{\sqrt[10]{a^2b^2}}{\sqrt[5]{ab^2}} =$
   d) $\frac{a^2\ b\ c^4}{\sqrt[7]{a^{16}\,.b^4\,.c^{22}}} =$
   e) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} =$
   f) $\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} =$
   g) $\frac{4ab}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}} =$
   h) $\frac{4ab}{\sqrt{a+b}-\sqrt{b}} =$

38. Efectúa las potenciaciones y radicaciones siguientes.
   a) $\left(\sqrt[3]{ab^3}\right)^2 =$
   b) $\left(\sqrt[5]{3b^3}\right)^3 =$
   c) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{2x^2}} =$
   d) $\sqrt{\sqrt{bc^2}} =$

39. Expresa los siguientes radicales como potencia de exponente fraccionario.
   a) $\sqrt{a} =$
   b) $\sqrt[3]{b^2}=$
   c) $\frac{1}{\sqrt{2}} =$
   d) $\frac{1}{\sqrt[3]{b^5}} =$

40. Expresa en forma radical.
   a) $a^{\frac{1}{3}} =$
   b) $x^{\frac{4}{5}} =$
   c) $b^{-\frac{1}{5}} =$

d) $y^{-\frac{3}{2}} =$

41. Resuelve las siguientes operaciones aplicando las propiedades de la potenciación.
    a) $a^{\frac{3}{3}} . a^{\frac{1}{3}} =$
    b) $2^{\frac{3}{10}} . 2^{\frac{3}{5}} =$
    c) $x^{\frac{2}{5}} : x^{\frac{3}{5}} =$
    d) $3^{\frac{11}{12}} : 3^{\frac{7}{12}} =$
    e) $\left(5^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} =$
    f) $\left(a^{\frac{4}{3}}\right)^{-3} =$
    g)
42. Efectúa las siguientes operaciones
    a) $\sqrt[3]{-27} =$
    b) $-\sqrt{-64} =$
    c) $-\sqrt{64} =$
    d) $\pm\sqrt[6]{64} =$
    e) $\sqrt[6]{64} =$
    f) $-\sqrt[3]{64}$

43. Determina si han sido resueltos en forma correcta los siguientes ejercicios. Justifica la respuesta.
    a. $\sqrt{4 . 9} = \sqrt{4} . \sqrt{9} = 2 . 3 = 6$
    b. $\sqrt{-4} . \sqrt{-9} = \sqrt{(-4) . (-9)} = \sqrt{36} = 6$
    c. $\sqrt{2} . \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$
    d. $\sqrt{(-2) . (-8)} = \sqrt{16} = 4$
    e. $\sqrt{9 + 16} = 3 + 4 = 7$
    f. $\sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$
    g. $\sqrt[3]{-64} : \sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{(-64) : (-8)} = \sqrt[3]{8} = 2$
    h. $\sqrt[3]{8 - 64} = 2 - 4 = -2$

44. Sabiendo que a∈ R, calcula:
    a) $\sqrt{a^2} =$
    b) $\left(\sqrt{a}\right)^2 =$
    c) $\sqrt{(-a)^2} =$
    d) $\left(\sqrt{-a}\right)^2 =$
    e) $\sqrt{-a^2} =$
    f) $\sqrt[3]{a^3} =$
    g) $\sqrt[3]{(-a)^3} =$
    h) $\left(\sqrt[3]{-a}\right)^3 =$
    i) $\sqrt{(-1)^2} =$
    j) $\left(\sqrt{-1}\right)^2 =$
    k) $\sqrt{-2^2} =$

l) $\sqrt{-(-2)^2} =$

45. Simplifica los siguientes radicales.

a) $\sqrt{\left(1+\sqrt{2}\right)^2} =$

b) $\sqrt[3]{\left(1+\sqrt{2}\right)^3} =$

c) $\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2} =$

d) $\sqrt[3]{\left(\sqrt{2}-1\right)^3} =$

e) $\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2} =$

f) $\sqrt[3]{\left(1-\sqrt{2}\right)^3} =$

46. Extrae del radical los factores que sea posible, sabiendo que a, b y x son reales positivos.

a) $\sqrt{x^3} =$

b) $\sqrt{27} =$

c) $\sqrt{ab^5} =$

d) $\sqrt[3]{a^4b^5x^2} =$

e) $\sqrt[4]{4x^5} =$

f) $\sqrt{8x^4} =$

g) $\sqrt[3]{432} =$

h) $\sqrt[5]{77760} =$

i) $\sqrt{3125x^3b^2} =$

j) $\sqrt[3]{2401b^3} =$

k) $\sqrt{20x^6y^{15}} =$

l) $\sqrt[3]{3x^{17}b^{32}} =$

47. Resuelve las siguientes operaciones en R, suponiendo que a, b y x son números reales positivos.

a) $\sqrt{3}+5\sqrt{3}-\sqrt{3} =$

b) $\sqrt[3]{a^2}-2\sqrt[3]{a^2} =$

c) $\sqrt[3]{x^2}+x\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x^4} =$

d) $\sqrt{12}+\sqrt{75}-\sqrt{27}-\sqrt{48} =$

e) $2\sqrt[3]{x}-3\sqrt[5]{x}+2\sqrt[5]{x}-\sqrt[3]{x} =$

f) $\sqrt{2}+2\sqrt{2}+\sqrt{8}-3\sqrt{8} =$

g) $a\sqrt{ab^3}-2ab\sqrt{ab}+2b\sqrt{a^3b}-3\sqrt{a^3b^3} =$

h) $\frac{1}{2}\sqrt{12}-\frac{1}{3}\sqrt{18}+\sqrt{2}+\sqrt{27}+5\sqrt{0{,}02} =$

i) $a\sqrt[3]{81a}-3\sqrt[3]{a}+2\sqrt[3]{3a^4}+2\sqrt[3]{24(-a^4)} =$

j) $2\sqrt{24}+\sqrt{54}+2\sqrt{18}-5\sqrt{6} =$

48. Resuelve las siguientes operaciones en R, suponiendo que a, b y x son números reales positivos.

a) $\sqrt{2}\,.\,\sqrt{8} =$
b) $\sqrt{x}\,.\,\sqrt{xy} =$
c) $\sqrt[5]{x^2y}\,.\,\sqrt[5]{x^4y^4} =$
d) $\sqrt[4]{3x^2}\,.\,\sqrt[4]{x^3y}\,.\,\sqrt[4]{27x^3y^2} =$
e) $\sqrt[3]{-2}\,.\,\sqrt[3]{-4} =$
f) $\sqrt[7]{4xy^2z}\,.\,\sqrt[7]{4xy}\,.\,\sqrt[7]{4z^6}\,.\,\sqrt[7]{2y^4} =$
g) $\sqrt[4]{2x^2}\,.\,\sqrt[4]{xy}\,.\,\sqrt[4]{2xy} =$
h) $\sqrt{2x}\,.\,\sqrt[4]{x^3} =$
i) $\sqrt{3}\,.\,\sqrt[3]{2} =$
j) $\sqrt{xy}\,.\,\sqrt[4]{xy^3}\,.\,\sqrt{x} =$
k) $\sqrt[3]{2z}\,.\,\sqrt[6]{8xz} =$
l) $\sqrt{2z}.\,\sqrt[6]{8xz} =$
m) $\sqrt{x}.\,\sqrt[5]{x} =$
n) $\sqrt{3xy^3}\,.\,\sqrt[6]{3x^5y}\,.\,\sqrt[3]{3x^2y} =$
o) $\sqrt[4]{x^2}\,.\,\sqrt[6]{x}\,.\,\sqrt[3]{4x}\,.\,\sqrt{2} =$
p) $\sqrt[5]{z}\,.\,\sqrt{8z}\,.\,\sqrt[4]{4z^2} =$
q) $\sqrt[4]{27x}\,.\,\sqrt[6]{x^2y}\,.\,\sqrt{xy}\,.\,\sqrt[4]{3x}\,.\,\sqrt[3]{x^2y} =$
r) $\sqrt{2xy}\,.\,\sqrt[3]{2xy}\,.\,\sqrt[6]{2xy}$
s) $\frac{1}{2}\sqrt{3x^2}\,.\,\frac{2}{3}\sqrt[3]{9x} =$
t) $\sqrt[3]{\frac{1}{4}x}\,.\,\sqrt[6]{2x^4}\,.\,\sqrt{\frac{1}{2}x^3} =$
u) $\frac{4}{3}\sqrt[5]{0{,}01x^2}\,.\,3\sqrt[10]{0{,}1x^3}\,.\,\frac{5}{2}\sqrt{0{,}1x} =$
v) $\sqrt[10]{\frac{4}{5}z}\,.\,\sqrt{0{,}4z}\,.\,\sqrt[5]{0{,}02z^2}\,.\,\sqrt[4]{0{,}01} =$

49. Resuelve las siguientes operaciones en R
a) $\sqrt{2}\,.\left(\sqrt{2}+1\right) =$
b) $\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right).\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right) =$
c) $\sqrt{6}\,.\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right) =$
d) $\left(1-\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right) =$
e) $\left(\sqrt{2}-2\right)\left(1+\sqrt{2}\right) =$
f) $\left(\sqrt{6}-2\right).\left(\sqrt{6}+3\right) =$

50. División de radicales: Resuelve las siguientes operaciones en R, suponiendo que x, y y z son números reales positivos.
a) $\sqrt{3x} : \sqrt{x} =$
b) $\sqrt{x^3} : \sqrt{x}$
c) $\sqrt{x} : \sqrt[4]{x} =$
d) $x : \sqrt{x} =$
e) $\sqrt[12]{8z^{13}} : \sqrt[4]{2z^3} =$
f) $\sqrt{xyz} : \sqrt[5]{xy^2z^2} =$
g) $\sqrt{zy} : \sqrt[3]{z} =$
h) $\sqrt[4]{2x^3} : \sqrt[6]{2x^2} =$
i) $\sqrt[5]{xy^4z^2} : \sqrt[3]{y^2z} =$

51. Realiza las siguientes divisiones racionalizando los divisores, sabiendo que a, b c y d son números reales positivos. Observa que en algunos casos es conveniente aplicar la propiedad distributiva de la radicación respecto a la división antes de racionalizar.

a) $\sqrt{a} : \sqrt{ab} =$
b) $x : \sqrt{x} =$
c) $\frac{1}{\sqrt{2}} =$
d) $\sqrt{\frac{a}{b}} =$
e) $a\sqrt[3]{ab^2} : \sqrt[3]{a^2b} =$
f) $x : \sqrt[5]{x^4} =$
g) $2 : \sqrt{2} =$
h) $ab\sqrt[3]{b} : \sqrt[3]{ab^3} =$
i) $\frac{ab\sqrt[5]{c^2}}{\sqrt[5]{a^2b^7c^{12}}} =$
j) $\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{12}} =$
k) $\frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{375}} =$
l) $\frac{1}{\sqrt[7]{ab^6c^{10}}} =$
m) $\frac{1}{\sqrt[3]{75}} =$
n) $\frac{\sqrt[5]{216}}{\sqrt[5]{108}} =$
o) $\frac{1}{\sqrt{\pi}} =$
p) $\frac{\pi}{\sqrt{\pi}} =$
q) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} =$
r) $\frac{9}{\sqrt{11}-\sqrt{2}} =$
s) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}} =$
t) $\frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} =$
u) $\frac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} =$
v) $\frac{\sqrt{12}}{3-\sqrt{3}} =$
w) $\frac{\sqrt{2}-2}{1-\sqrt{2}} =$
x) $\frac{\sqrt{6}+3}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} =$
y) $\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{50}-\sqrt{2}} =$
z) $\frac{5+\sqrt{5}}{\sqrt{5}+2} =$
aa) $\frac{a-1}{\sqrt{a^3}+a} =$
bb) $\frac{a-\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1} =$
cc) $\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} =$
dd) $\frac{1-a}{\sqrt{a}+1}$

52. Potenciación y radicación. Resuelve las siguientes operaciones, siendo x e y Números reales positivos.

a) $\left(\sqrt{2x}\right)^3 =$

b) $\left(\sqrt[5]{9xy^4}\right)^3 =$

c) $\left(\sqrt{x^2y}\right)^4 =$

d) $\left(\sqrt[3]{3y^2}\right)^4 =$

e) $\sqrt{\sqrt[3]{x^2y^4}} =$

f) $\sqrt{\sqrt[5]{x}} =$

g) $\sqrt[5]{\sqrt{32}} =$

h) $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[10]{x^{12}}}}$

53. Operaciones combinadas. Resuelve las siguientes operaciones en R.

a) $\left(\sqrt{3}+1\right)^2 =$

b) $\left(2+\sqrt{5}\right)^3 =$

c) $\left(1+\sqrt{2}\right)^3 =$

d) $\left(2-\sqrt{5}\right)^3 =$

e) $\left(\sqrt{10}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}+1\right)\sqrt{2} =$

f) $\sqrt[3]{2}\,.\,\sqrt[3]{16}-2\sqrt[3]{4} =$

g) $\sqrt{\frac{1}{2}}-3\sqrt{\frac{1}{27}}+\sqrt{\frac{1}{3}}-3\sqrt{\frac{1}{8}} =$

h) $\frac{2}{5}\sqrt[3]{-27}+\frac{1}{2}\sqrt{(-5)^2}-\frac{1}{10}\sqrt[3]{(-2)^6} =$

i) $0{,}3\sqrt[3]{(-2)^4}+\frac{3}{5}\sqrt[3]{-8}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{9}{25}} =$

j) $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{-1} =$

k) $\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\right)^2 =$

l) $\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}} =$

m) $\sqrt[3]{\frac{\sqrt{8}-8}{\sqrt{8}-1}} =$

54. Expresar en forma de radical las siguientes potencias, de tal manera que todos los índices y exponentes sean positivos.

a) $2^{\frac{1}{2}} =$

b) $3^{\frac{2}{3}} =$

c) $2^{-\frac{3}{2}} =$

d) $x^{-\frac{5}{2}} =$

e) $a^{-\frac{4}{5}} =$

f) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{5}} =$

55. Expresa los siguientes radicales como potencias de exponente fraccionario, en la forma más abreviada posible.

a) $\sqrt[3]{a^5} =$

b) $\sqrt[5]{2^5} =$

c) $\frac{1}{\sqrt[3]{a^4}} =$

d) $\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^3}} =$

e) $\frac{1}{\sqrt[3]{a^4}} =$

f) $\sqrt[5]{\frac{1}{5}} =$

56. Realiza las siguientes operaciones. Expresa el resultado como potencia de exponente racional.

a) $3^{\frac{1}{3}} . 3^{-1} =$

b) $\left(2^{-\frac{1}{4}} . 2^{\frac{1}{10}}\right)^2 =$

c) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-1} : \left(\frac{1}{5}\right)^{-\frac{2}{3}} =$

d) $2^4 . 2^{-\frac{1}{2}} : \left(2^{\frac{1}{3}} : 2^{-\frac{3}{2}}\right) =$

e) $3^{\frac{1}{5}} . \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}} : 3^{\frac{1}{5}} . 9^{\frac{1}{5}} =$

f) $\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{2}} . 2^{-1}}{3^{-\frac{2}{3}} . \left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{2}{3}}} =$

g) $\left[\frac{x^{-\frac{1}{3}} . \left(\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}}{x^{\frac{2}{3}} . (2x)^{-\frac{3}{2}}}\right]^{-\frac{1}{2}} =$

h) $\frac{\left[(a+b)^{-\frac{1}{2}} . (a+b)^{\frac{3}{2}}\right]^{-\frac{1}{2}}}{a^{\frac{3}{2}} . a^{-\frac{1}{2}} . b^{\frac{1}{2}}} =$

i) $\left[\frac{(2x)^{-\frac{1}{2}} . \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{5}}}{\left(\frac{x^2}{4}\right)^{\frac{1}{10}} . (8x)^{\frac{1}{2}}}\right]^{-\frac{1}{2}} =$

57. Calcula el resultado de los siguientes, de dos formas distintas.

- Operando con radicales
- Operando con exponentes racionales

a) $\sqrt{x^3} . \sqrt[3]{x^4} =$

b) $\sqrt[4]{8^3} : \sqrt[3]{8} =$

c) $\frac{\sqrt[5]{27a^2} . \sqrt{9a^3}}{\sqrt[4]{a^2}} =$

d) $\left(\sqrt[6]{16} . \sqrt[3]{\sqrt[3]{8}}\right)^2 =$

e) $\sqrt{\sqrt{a^3}\,.\,\sqrt[3]{a}} =$

f) $\sqrt{\frac{\left(\sqrt{2}\right)^5}{\sqrt[4]{2^3}}} =$