III.2 UNIDAD 2: FUNCIONES POLINÓMICAS

III.2.1 POLINOMIOS

La expresión $5x^3 + 7\,x^2 + 4x - 12$ recibe el nombre de **polinomio en la variable *x***. Es de *tercer grado*, porque la tercera es la máxima potencia de la variable x que aparece en él. Los *términos* de este polinomio son: $5x^3 + 7\,x^2 + 4x$ y -12. Los *coeficientes* son 5, −7, 4, y −12.

En un polinomio los números expresados mediante cifras o letras son números reales y están relacionados a través de las operaciones: suma, resta, producto y potencia de exponente natural. Es decir todos los exponentes de las variables de un polinomio deben ser enteros no negativos. Por consiguiente, las expresiones $x^3 + x^{1/2}$ y $x^{-2} + 3x + 1$ no son polinomios, porque contienen exponentes fraccionarios y negativos.

Cualquier constante diferente de cero, como 7, se clasifica como un polinomio de grado cero, ya que: $7 = 7x^0$. También al número cero nos referimos como una constante polinomial, pero no se le asigna grado alguno.

Los polinomios que tienen sólo uno, dos o tres términos reciben nombres especiales:

Números de términos	Nombre del polinomio	Ejemplo
uno	monomio	$17\,x^5$
dos	binomio	$2x^3 - 6x$
tres	trinomio	$x^4 - x^2 + 2$

La variable x en el polinomio representa cualquier número real. Por este motivo expresiones como $2x$, $x + 3$ y $x^2 + x$ representan también números reales, cuyo valor depende del que tome x. Por ejemplo si $x = 3$ los valores de las expresiones dadas serán 6, 6 y 12 respectivamente.

Ya que cada símbolo de un polinomio es un número real, se pueden usar las propiedades del sistema de los números reales para operar con ellos.

En general:

Un polinomio de grado n en la variable x se puede escribir en cualquiera de las siguientes formas estándar:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

Donde los coeficientes $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ son números reales, y los exponentes son enteros no negativos. El **coeficiente principal** es $a_n \neq 0$, y a_0 es el **término constante**

Cabe aclarar que también se puede considerar que a_0 es el coeficiente del término $a_0\, x^0$.

III.2.2 OPERACIONES ENTRE POLINOMIOS

III.2.2.1 Suma o resta de polinomios

Cuando se suman o se restan dos polinomios, el resultado es otro polinomio.

$$\mathbf{P(x) + Q(x) = S(x)}$$

Al efectivizar dichas operaciones se suman o restan los coeficientes respectivos de iguales potencias de la variable, es decir se agrupan los términos semejantes (propiedad asociativa y conmutativa), para operar con ellos, o bien, se aplica la propiedad distributiva.

Por ejemplo, sean los polinomios: $P(x) = x + 2x^2 - 1$ y $Q(x) = 3x + 2$, hallar la suma de los mismos.

Solución:

$(2x^2 + x - 1) + (3x + 2)$	se suprime paréntesis utilizando la regla de supresión de paréntesis,
$2x^2 + x - 1 + 3x + 2$	se agrupan los términos semejantes haciendo uso de las propiedades conmutativa y asociativa,
$2x^2 + (x + 3x) - 1 + 2$	se suman los coeficientes de las potencias iguales de *x*.
$2x^2 + 4x + 1$	

¿Por qué no es válido sumar los términos $2x^2$ y $4x$?

Veamos otro ejemplo:

Dado los Polinomios $P(x) = 4x^3 - 10x^2 + 5x + 8$ y $Q(x) = 12x^2 - 9x - 1$, efectuar la resta de los mismos.

Solución:

$(4x^3 - 10x^2 + 5x + 8) - (12x^2 - 9x - 1)$	se suprime paréntesis utilizando la regla de supresión de paréntesis,
$4x^3 - 10x^2 + 5x + 8 - 12x^2 + 9x + 1$	se agrupan los términos semejantes haciendo uso de las propiedades conmutativa y asociativa,
$4x^3 + (-12x^2 - 10x^2) + (5x + 9x) + (8 + 1)$	se suman los coeficientes de las potencias iguales de *x*, o bien se aplica la propiedad distributiva del producto respecto a la suma.
$4x^3 + (-12 - 10)\, x^2 + (5 + 9)\, x + (8 + 1)$	
$4x^3 - 22\, x^2 + 14\, x + 9$	

Intentar lo siguiente

Dado los siguientes polinomios

$P(x) = 3x^2 + 4x^2 - 2x$ $\quad$ $Q(x) = -2x^2 + 3x + 1/2$

$R(x) = 5x^4 - 7x^3 + 4x^2 - 3$ $\quad$ $S(x) = 5x^4 + 2x^2 - 2x + 4$

Realizar las siguientes operaciones:

a) P(x) + S(x) b) R(x) − P(x) c) S(x) − S(x)

d) Q(x) + P(x) e) R(x) − S(x)

¿Qué se puede decir del grado del polinomio obtenido al sumar o restar dos polinomios?

III.2.2.2 Producto entre polinomios

Cuando se multiplican dos polinomios el resultado es otro polinomio, obtenido de aplicar la propiedad distributiva del producto respecto de la suma y las leyes de los exponentes.

$$\mathbf{P(x)\ Q(x) = T(x)}$$

Veamos a través del siguiente ejemplo:

Sean $P(x) = 2x - 3$ y $Q(x) = x^{2} + 2x - 1$. Hallar $P(x)\ Q(x)$

Cuando se multiplican dos polinomios debemos multiplicar cada término del primer polinomio por cada término del segundo:

$$\mathbf{(2x - 3) \quad . \quad (x^2 + 2x - 1)}$$

Solución:

$$P(x)\ Q(x) = 2x\ (x^2) + (2x)\ (2x) + (2x)\ (-1) + (-3)\ (x^2) + (-3)\ (2x) + (-3)\ (-1) =$$
$$= 2x^3 + 4x^2 - 2x - 3\ x^2 - 6x + 3$$

se asocian términos semejantes y se encuentra el resultado final

$$P(x)Q(x) = 2x^3 + (4x^2 - 3x^2) + (-2x - 6x) + 3 = 2x^3 + x^2 - 8x + 3$$

Intentar lo siguiente

Dados los siguientes polinomios

$P(x) = -\ 3x$ $Q(x) = x^3 + 2x^2 - 1$

$R(x) = x^2 - 3x + 5$ $S(x) = 2x^3 - 3x$

Realizar las siguientes operaciones:

a) P(x) S(x) b) R(x) S(x) c) Q(x) R(x)

¿Cómo se calcularían las siguientes potencias: $[S(x)]^2$; $[P(x)]^3$; $[Q(x)]^2$?.

III.2.2.3 Productos notables

Resolver los siguientes productos entre binomios:

a) $(A + B)(A + B)$ b) $(A - B)(A - B)$

c) $(A + B)(A - B)$ d) $(A + B)^2 (A + B)$

donde A y B representan monomios cualesquiera.

¿Qué se puede decir de los polinomios obtenidos?. Caracterizarlos.

A continuación se ejemplifica lo solicitado en el ítem d) $(A + B)^2 (A + B)$
Por definición de potencia podemos escribir:

$$\begin{aligned}(A + B)^2 (A + B) &= [(A + B)(A + B)](A + B) = \\ &= [A^2 + 2AB + B^2](A + B) = \\ &= A^2 (A + B) + 2\,AB\,(A + B) + B^2 (A + B) = \\ &= A^3 + A^2 B + 2\,A^2 B + 2\,AB^2 + AB^2 + B^3 = \\ &= A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3\end{aligned}$$

El polinomio obtenido es un **cuatrinomio cubo perfecto**. Entonces, encontrar el cubo de un binomio equivale a resolver cualquiera de los siguientes productos:

$$(A + B)^3 = (A + B)(A + B)(A+B) = (A + B)^2 (A + B) = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$

Resolver: a) $(4x - 5)^3$
b) $(2x^2 + x^3)^2$
c) $(4x + x^3)(4x - x^3)$.

III.2.2.4 División de polinomios

La división de polinomios se realiza con un algoritmo similar al de la división entera.

Recordemos el algoritmo de la división entera

$$\begin{array}{l|l} D & d \\ \hline R & C \end{array}$$

sabemos que en este algoritmo, el divisor (d) nunca es cero y el resto es menor que el divisor y se cumple que $D = d \cdot C + R$. Es decir, que el dividendo (D) es igual al divisor (d) por el cociente (C) más el resto (R).

Para que la división entre polinomios sea otro polinomio, el divisor debe ser de grado igual o menor que dividendo.

Luego, en el caso de la división de polinomios, se cumple:

$$\boxed{P(x) \;=\; Q(x)\,C(x) \;+\; R(x)}$$

Analicemos el siguiente ejemplo:

Dividir el polinomio $P(x) = 3x^3 - x^2 - 2x + 6$ por $Q(x) = x^2 + x$

Solución:

$$\begin{array}{rrll}
\text{Dividendo } [P(x)] \rightarrow & 3x^3 - x^2 - 2x + 6 & \big|\,\underline{x^2 + x} & \rightarrow \text{ Divisor } [Q(x)] \\
 & -\,\underline{3x^3 - 3x^2\qquad\quad} & \;\;3x - 4 & \rightarrow \text{ Cociente } [C(x)] \\
 & -4x^2 - 2x + 6 & & \\
 & \underline{4x^2 + 4x\qquad} & & \\
 & 2x + 6 & \rightarrow \text{ Resto } [R(x)] &
\end{array}$$

El procedimiento es el siguiente:

1. Se escriben los polinomios dividendo y divisor ordenados en forma decreciente
2. Se divide $3x^3$ (el primer término del dividendo) por x^2 (el primer término del divisor), para obtener 3x (el primer término del cociente).
3. Se multiplica $x^2 + x$ (el divisor) por 3x y se obtiene $3x^3 + 3x^2$.
4. Se cambia de signo obteniéndose $-\ 3x^2 - 3x$ y se coloca debajo de los términos correspondientes en el dividendo.
5. Se suma para obtener $-\ 4x^2$, y se escriben a continuación los demás términos del polinomio dividendo, el polinomio obtenido se trata como el nuevo dividendo.
6. Se divide $-\ 4x^2$ (el primer término del nuevo dividendo) por x^2, se obtiene $-\ 4$ (el segundo término del cociente).
7. Se multiplica $x^2 + x$ por $-\ 4$ y se suma el producto del nuevo dividendo cambiado de signo. Este resultado, $2x + 6$, representa el resto de la división debido a que es un polinomio de grado menor que el grado del divisor, por lo tanto la división está terminada.

Como el resto no es cero, el polinomio dividendo no es múltiplo del divisor. Según la relación de la división entera, el polinomio dividendo se podrá escribir como:

$$3x^3 - x^2 - 2x + 6 \;=\; (x^2 + x)\cdot(3x - 4) + (2x + 6)$$

$$P(x) \;=\; Q(x) \;\cdot\; C(x) \;+\; R(x)$$

Analicemos otro ejemplo:

Dados los polinomios $P(x) = x^4 - 2x^2 - 8$ y $Q(x) = x^2 + 2$, efectuar el cociente P(x):Q(x)

Solución:

$$\begin{array}{lrl|ll}
\text{Dividendo } [P(x)] \rightarrow & & x^4 - 2x^2 - 8 & x^2 + 2 & \rightarrow \text{ Divisor } [Q(x)] \\
\cline{4-4}
& - & \underline{x^4 - 2x^2} & x^2 - 4 & \rightarrow \text{ Cociente } [C(x)] \\
& & -4x^2 - 8 & & \\
& & \underline{4x^2 + 8} & & \\
& & 0 \quad \rightarrow \text{ Resto } [R(x)] & &
\end{array}$$

Como en este caso el resto es 0, el polinomio dividendo es múltiplo del divisor y la relación anterior se reduce a: $P(x) = Q(x)\ C(x)$ poniendo en evidencia la posibilidad de escribir el polinomio dividendo como un producto de factores: $x^4 - 2x^2 - 8 = (x^2 + 2)\ (x^2 - 4)$.

Intentar lo siguiente

i) Usar el algoritmo de la división para encontrar el cociente y el resto de las siguientes divisiones entre polinomios.

a) $(x^3 - x^2 - x + 10) : (x^2 - 3x + 5)$ b) $(4x^3 - 5x^2 + x - 7) : (x^2 - 2x)$

c) $(5x^2 + 7x + x^3 + 8) : (x - 2)$ d) $(x^3 - 2x^2 - 13x + 6) : (x + 3)$

ii) Verificar cada resultado teniendo en cuenta la relación entre dividendo, divisor, cociente y resto: $P(x) = Q(x)\ C(x) + R(x)$.

> Analizar la validez de la siguiente afirmación:
> "La expresión $\dfrac{\mathbf{P}(x)}{\mathbf{Q}(x)} = \mathbf{C}(x) + \dfrac{\mathbf{R}(x)}{\mathbf{Q}(x)}$, representa el resultado de la división de los polinomios P(x) y Q(x)".

III.2.2.4.1 División de un polinomio por un monomio de la forma $x - c$

Cuando se realiza la división entera de un polinomio P(x) por un binomio de la forma $x - c$, donde **c** es un número real, puede ocurrir que el resto sea de grado cero o que sea el polinomio nulo. Por lo tanto, el resto es un número que se designará con R.

El siguiente teorema relaciona el resto R obtenido de la división de un polinomio P(x) por $x - c$ y el valor del polinomio en $x = c$.

> **Teorema del resto**: "Cuando un polinomio P(x) se divide por $x - c$, el resto R es el valor del polinomio en $x = c$, esto es, R = P(c)."

En efecto:

$$\begin{array}{l|ll}
P(x) & x - c & \rightarrow \quad P(x) = (x - c) \cdot C(x) + R \\
\cline{2-2}
R & C(x) & \quad P(c) = (c - c) \cdot C(x) + R \\
& & \quad \text{Luego} \quad P(c) = R
\end{array}$$

Por ejemplo: si $P(x) = x^3 - 3x^2 + 4$, es posible anticipar cuál será el resto de dividirlo por $x - 1$, ya que según el teorema se tendrá:

$$R = P(1) = (1)^3 - 3(1)^2 + 4 = 2$$

También se puede escribir $P(x)$ en términos de $x - 1$ encontrando el cociente $C(x)$ y utilizando la expresión de la división entera:

$$P(x) = (x - 1)\, C(x) + 2$$

Si $P(c) = 0$, entonces $x = c$ se constituye en una raíz de $P(x)$, quedando $P(x)$ expresado como un producto, es decir $P(x)$ está factorizado:

$$P(x) = (x - 1)\, C(x)$$

Así, si el divisor fuera $x - 2$, se tiene que $P(2) = 2^3 - 3.2^2 + 4 = 0$, por consiguiente $x - 2$ será un factor de $P(x)$ y podrá expresarse de la siguiente manera:

$$P(x) = (x - 2)\,(x^2 - x - 2)$$

donde $C(x) = x^2 - x - 2$ es el cociente de la división, el cual puede obtenerse fácilmente mediante la regla de Ruffini.

A continuación se recuerda el algoritmo correspondiente a la regla de Ruffini:

1. En el primer renglón se escriben los coeficientes del dividendo (el cual debe estar completo y ordenado en forma decreciente). A la izquierda, sólo se escribe la raíz del divisor (el valor que lo anula).

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & 0 & 4 \\ 2 & & & & \\ \hline & & & & \end{array}$$

Los demás coeficientes se obtienen de la siguiente forma:

2. El coeficiente principal del dividendo (1) se copia abajo. Se lo multiplica por 2 y el resultado (2) se escribe debajo del siguiente coeficiente del dividendo (–3). Se suman –3 y 2 y el resultado (–1) se escribe abajo.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & 0 & 4 \\ 2 & & 2 & & \\ \hline & 1 & -1 & & \end{array}$$

3. El -1 obtenido en el paso anterior reinicia el ciclo: se lo multiplica por 2 y el resultado (– 2) se escribe debajo del siguiente coeficiente del dividendo (0). Se suman 0 y – 2 y el resultado (–2) se escribe abajo.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & 0 & 4 \\ 2 & & 2 & -2 & \\ \hline & 1 & -1 & -2 & \end{array}$$

4. El -2 obtenido en el paso anterior reinicia el ciclo: se lo multiplica por 2 y el resultado (– 4) se escribe debajo del siguiente coeficiente del dividendo (4). Se suman 4 y – 4 y el resultado (0) es el resto. Se escribe abajo.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & 0 & 4 \\ 2 & & 2 & -2 & -4 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}$$

El resto es 0. Los valores 1, –1 y –2 son los coeficientes del polinomio cociente: $C(x) = x^2 - x - 2$, cuyo grado es en una unidad menor que el del polinomio dividendo.

> Recuerda que la Regla de Ruffini sólo se podrá aplicar en cocientes donde el divisor es de la forma $x - c$.

Conviene tener presente que:

> Decir que P(c) = 0, equivale a decir que:
>
> - $(x - c)$ divide exactamente a $\mathbf{P}(x)$ o que $\mathbf{P}(x)$ es divisible por $(x - c)$,
> - $P(x)$ podrá expresarse como el producto: $P(x) = (x - c).C(x)$ donde $C(x)$ es el polinomio cociente entre $P(x)$ y $x - c$.

Intentar lo siguiente

Dadas las siguientes divisiones:

a) $(x^3 - 2x^2 - 5x + 6) : (x - 3)$ b) $(x^3 + 5x^2 - 7x + 8) : (x - 2)$

c) $(2x^3 + x^2 - 3x + 7) : (x + 1)$ d) $(x^3 + 27) : (x + 3)$

i) Utilizar el Teorema del Resto para establecer si el polinomio dividendo es divisible por el polinomio divisor.
ii) Cuando sea posible, factorizarlo en término del divisor, aplicando la regla de Ruffini para encontrar el cociente.

III.2.3 FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

Ya se ha dicho que factorizar un polinomio significa escribirlo como un producto equivalente al mismo.

- Uno de los métodos básicos de factorizar es el inverso de multiplicar por un monomio: **factor común**.

Veamos este problema con un ejemplo:

El polinomio $\mathbf{P}(x)$ se puede factorizar extrayendo como factor común diversos factores. Dado

$\mathbf{P}(x) = 24x^9 - 18x^6 - 6x^4 + 90x^2$ se podrán extraer por ejemplo: $3x$, $6x^2$ o $4x^3$ obteniéndose:

$$\mathbf{P}(x) = 24x^9 - 18x^6 - 6x^4 + 90x^2 = 3x(8x^8 - 6x^5 - 2x^3 + 30x)$$

$$\mathbf{P}(x) = 24x^9 - 18x^6 - 6x^4 + 90x^2 = 6x^2(4x^7 - 3x^4 - x^2 + 15)$$

$$\mathbf{P}(x) = 24x^9 - 18x^6 - 6x^4 + 90x^2 = 4x^3\left(6x^6 - \frac{9}{2}x^3 - \frac{3}{2}x + \frac{45}{2}x^{-1}\right)$$

Del análisis de lo hecho anteriormente se desprende que:

- es posible extraer distintos factores, no necesariamente los comunes,
- para asegurar que el polinomio dado pueda expresarse como el producto de dos polinomios, el grado del monomio extraído como factor común deberá ser a lo sumo, igual al grado del término de menor grado del polinomio.

Siempre se puede controlar que el producto que se obtuvo es correcto, aplicando la propiedad distributiva del producto respecto a la suma algebraica en $\Re$.

- Otros recursos para factorizar están relacionados con los productos notables de binomios estudiados anteriormente.

A continuación se ejemplifica con algunos de ellos:

Polinomio	Expresión desarrollada	Expresión factorizada
Trinomio cuadrado perfecto	$A^2 + 2AB + B^2$ $A^2 - 2AB + B^2$	$(A + B)(A + B) = (A + B)^2$ $(A - B)(A - B) = (A - B)^2$
Cuatrinomio cubo perfecto	$A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$ $A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$	$(A + B)(A + B)(A + B) = (A + B)^3$ $(A - B)(A - B)(A - B) = (A - B)^3$
Diferencia de cuadrados	$A^2 - B^2$	$(A + B)(A - B)$

Factorizar las expresiones anteriores resultó sencillo debido a que los polinomios involucrados eran "especiales", por ejemplo: un trinomio cuadrado perfecto, una diferencia de cuadrados; por lo tanto fue posible recurrir a las técnicas de factoreo estudiadas en el nivel medio.

A continuación presentaremos una herramienta útil al momento de transformar un polinomio cualquiera en producto de factores, el **Teorema del Factor**.

"Un polinomio $\mathbf{P}(x)$ tiene un factor $x - c$, si y sólo si: $P(c) = 0$"

Este teorema asegura que basta encontrar un valor de "c" que anule a $P(x)$, para determinar uno de los factores del polinomio dado; en efecto, este podrá escribirse como $P(x) = (x - c)\,C(x)$ donde $C(x)$ es el polinomio cociente, por estar asegurado que el resto de la división es cero (Teorema del resto).

Entonces, encontrando un valor de "c" que anule a $P(x)$ tendremos asegurado que el binomio $x - c$ será un divisor de $P(x)$ y por lo tanto será posible iniciar la factorización del polinomio.

Factorizar completamente a $P(x)$ implicará establecer la existencia de algún factor de $C(x)$, el cociente de la división anterior. Este procedimiento deberá continuarse hasta que el último cociente hallado, no contenga ningún factor (no exista un valor de "c" que lo anule).

Ejemplo: Factorizar $P(x) = x^4 + 4x^3 - 4x^2 - 16x$

Solución: Es evidente que $c_1 = 0$ anula a $P(x)$ por lo tanto el binomio $x - c_1 = x - 0 = x$ divide exactamente a $P(x)$, luego se podrá escribir que:

$$P(x) = (x - c_1)\,C_1(x) = x\,(x^3 + 4x^2 - 4x - 16)$$

como en este caso el divisor es un monomio, el polinomio cociente se puede hallar dividiendo cada término del polinomio $\mathbf{P}(x)$ por x:

$$\frac{x^4 + 4x^3 - 4x^2 - 16}{x} = \frac{x^4}{x} + \frac{4x^3}{x} - \frac{4x^2}{x} - \frac{16x}{x}$$

Poder factorizar P(x) completamente implicará averiguar si existe algún factor de $C_1(x)$; como para $c_2 = 2$ $C_1(x)$ se anula, podremos afirmar que el binomio $x - c_2 = x - 2$ permitirá escribir $C_1(x) = (x - c_2)\, C_2(x)$ donde $C_2(x)$ podrá encontrarse mediante la regla de Ruffini. Luego,

$$P(x) = (x - c_1)\, C_1(x) = (x - c_1)\,(x - c_2)\, C_2(x)$$

$$P(x) = x\,(x^3 + 4\,x^2 - 4\,x - 16) = x\,(x - 2)\,(x^2 + 6\,x + 8)$$

Como $C_2(x) = (x^2 + 6\,x + 8)$ se anula para $c_3 = -2$, el binomio $x - c_3 = x + 2$ será un factor de $C_2(x)$, por lo tanto se podrá escribir: $C_2(x) = (x - c_3)\, C_3(x)$ y el polinomio P(x) como:

$$P(x) = (x - c_1)\, C_1(x) = (x - c_1)\,(x - c_2)\, C_2(x) = (x - c_1)\,(x - c_2)\,(x - c_3)\, C_3(x)$$

$$P(x) = x\,(x^3 + 4\,x^2 - 4\,x - 16) = x\,(x - 2)\,(x^2 + 6\,x + 8) = x\,(x - 2)\,(x + 2)\,(x + 4)$$

de esta manera hemos logrado factorizar por completo al polinomio P(x), utilizando como único recurso la búsqueda de factores.

El polinomio P(x) es de cuarto grado y tiene cuatro raíces reales. En general se cumple:

El **teorema del factor** provee una herramienta para encontrar los diversos factores que posee un polinomio cualquiera, por lo que resulta útil como recurso para factorizar.

Todo polinomio P(x) de grado n que tenga n raíces reales, puede factorizarse como:

$$\mathbf{P(x) = a_n\,(x - c_1)\,(x - c_2)\,\ldots\,(x - c_n)}$$

Donde $\mathbf{a_n}$ es el coeficiente principal de P(x) y $\mathbf{c_1}$, $\mathbf{c_2}$, … , $\mathbf{c_n}$ son las raíces reales de P(x).

Veamos otro ejemplo: Factorizar $Q(x) = x^2 + 4$

Para factorizar el polinomio Q(x) será necesario buscar un valor de c que lo anule; como la suma de x^2 y 4 será siempre positiva se puede afirmar que no existe un número real que anule al polinomio, por lo tanto Q(x) no posee raíces reales; sus dos raíces son complejas: $\pm 2i$.

El siguiente teorema ayuda a caracterizar las raíces de un polinomio:

Si P(x) es un polinomio de grado $n \geq 1$, entonces P(x) = 0 tiene exactamente n raíces, siempre y cuando la multiplicidad k de una raíz se cuente k veces. (Pudiendo ser estas raíces reales o complejas).

Intentar lo siguiente

i) Establecer si existe un factor "x – c" para los siguientes binomios:

a) $x^3 + 1$ b) $1 + x^4$ c) $9x^2 - 1$

ii) En los casos que sea posible: a) Factorizar los binomios dados en términos del factor hallado. b) Factorizar por completo el binomio dado.

III.2.4 FUNCIONES POLINÓMICAS

Una función es polinómica si su regla de definición es un polinomio, es decir si puede expresarse de la forma $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ donde n es un número natural y los coeficientes $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0$ son números reales.

Como en un polinomio los números reales, expresados mediante cifras o letras, están relacionados a través de las operaciones: suma, resta, producto y potencia, el dominio natural de las funciones polinómicas (el conjunto para el cual están definidas) es el conjunto $\Re$.

III.2.4.1 Representación Gráfica de un Polinomio tipo: $a_1 x + a_0$

Teorema
La gráfica de un polinomio de grado menor o igual a uno, es una recta.

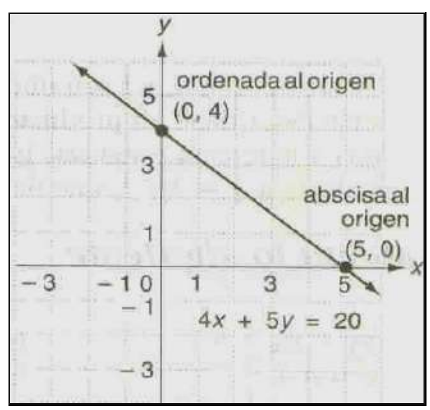
Dado que dos puntos determinan una línea, podemos representar gráficamente al polinomio de grado uno encontrando dos puntos que pertenezcan a su gráfica. Después, trazamos una línea que pase por dichos puntos.

Para mayor seguridad, siempre se debe utilizar un tercer punto como control. A menudo, los puntos más fáciles de encontrar son aquellos en los que la gráfica corta los ejes.

Definición
La **ordenada al origen** (intersección eje y) de una gráfica es la ordenada del punto en el que la gráfica corta al eje y. La **abscisa al origen** (intersección eje x) es la abscisa del punto en el que la gráfica corta al eje x.

Para encontrar la ordenada al origen, se hace $x = 0$ y se resuelve para y. Para encontrar la abscisa al origen, se hace $y = 0$ y se resuelve para x.

Ejemplo 1: Representar gráficamente $4x + 5y = 20$



Solución. Primero se hallan las intersecciones.

$x = 0 \quad \rightarrow \quad y = 4$ (ordenada al origen)

representa el punto (0, 4)

$y = 0 \quad \rightarrow \quad x = 5$ (abscisa al origen)

representa el punto (5, 0).

Podemos usar por ejemplo el punto (1, 16/15) como punto de control.

Intentar lo siguiente

Representar gráficamente: a) $2x - 6y = -2$ b) $3y = 2x - 6$

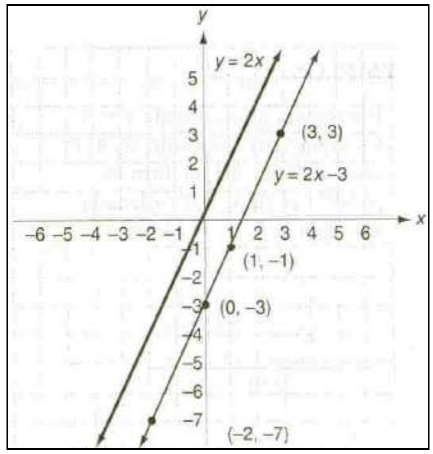
III.2.4.1.1 Rectas Paralelas

La gráfica de $y = mx$ es una línea recta que pasa por el origen. ¿Qué sucede si sumamos un número b al miembro derecho de la ecuación para obtener $y = mx + b$.

Ejemplo 3: Representar gráficamente $y = 2x - 3$ y comparar con la gráfica de $y = 2x$.

Primero construimos la tabla de valores, luego representamos gráficamente y comparamos.

x	y (o $2x - 3$)
0	−3
1	−1
3	3
−2	−7



La gráfica de $y = 2x - 3$ es una línea recta desplazada 3 unidades hacia abajo a partir de la gráfica de $y = 2x$.

> **Teorema**
> La gráfica de una ecuación de la forma $y = mx$ es una línea recta que pasa por el origen.
> La gráfica de $y = mx + b$ es una línea paralela a $y = mx$ que tiene como ordenada al origen al número b.

Intentar lo siguiente

Representar gráficamente y comparar con la gráfica de $y = 2x$.

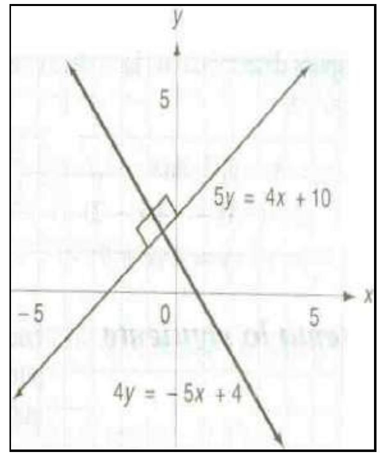
a) $y = 2x + 1$ b) $y = 2x - 4$

III.2.4.1.2 Rectas Perpendiculares

Si dos rectas se intersecan en ángulos rectos, son perpendiculares.

> **Teorema**
> Dos rectas no verticales son perpendiculares si y sólo si el producto de sus pendientes es −1.

Ejemplo 1: Determinar si las gráficas de $5y = 4x + 10$ y $4y = -5x + 4$ son perpendiculares.



Solución. Primero encontramos la forma pendiente – ordenada al origen resolviendo para y.

$$y = \frac{4}{5}x + 2 \qquad \text{y} \qquad y = -\frac{5}{4}x + 1$$

El producto de las pendientes es -1; es decir,

$$\frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{5}{4}\right) = -1.$$

Las rectas son perpendiculares.

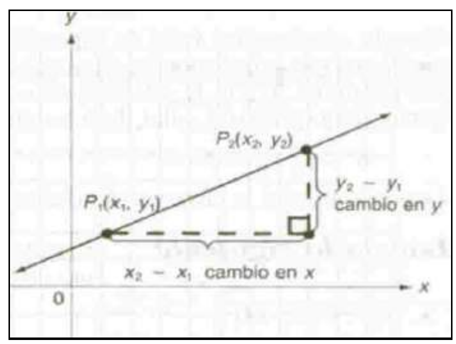
Intentar lo siguiente

Determinar si las gráficas de los siguientes pares de ecuaciones son perpendiculares:

a) $2y - x = 2$ y $y + 2x = 4$ b) $3y = 2x + 15$ y $2y = 3x + 10$

III.2.4.1.3 Determinación de la Pendiente de una Recta

Si observamos el grafico vemos una recta sobre la que hemos marcado dos puntos. A medida que vamos de P_1 a P_2, el cambio en x es $x_2 - x_1$. Análogamente, el cambio en y es $y_2 - y_1$.



La razón de cambio en y dividido por el cambio en x se llama **pendiente** de la recta.

Es común utilizar la letra m para designar pendientes.

Definición

La **pendiente** m de una recta es el cambio en y dividido por el cambio en x, o $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ donde (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son dos puntos cualesquiera de la recta, y $x_2 \neq x_1$.

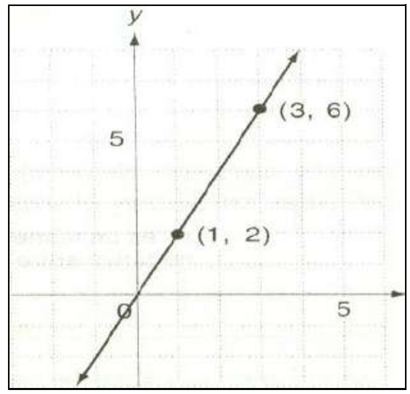
Para hallar la pendiente de una recta, se utiliza las coordenadas de dos puntos cualesquiera para determinar el cambio en y y el cambio en x. Después se divide el cambio en y por el cambio en x.

Ejemplo 1: Los puntos (1, 2) y (3, 6) están en una recta. Encontrar su pendiente.

Solución. $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ $\qquad \dfrac{\text{cambio en } y}{\text{cambio en } x}$

$= \dfrac{6-2}{3-1}$

$= \dfrac{4}{2} = 2$



Si utilizamos los puntos (1, 2) y (3, 6) en sentido inverso, encontramos que el cambio en y es negativo y el cambio en x es negativo. Obtenemos el mismo número para la pendiente.

$$m = \frac{2-6}{1-3} = \frac{-4}{-2} = 2$$

Cuando calculamos el valor de la pendiente, el orden de los puntos no importa en la medida en que calculemos las diferencias en el mismo orden.

Los puntos (0, 0) y (–1, –2) también se encuentran sobre la recta. Si utilizamos estos puntos para calcular el valor de la pendiente, obtenemos lo siguiente:

$$m = \frac{-2-0}{-1-0} = \frac{-2}{-1} = 2$$

La pendiente será la misma, independiente del par de puntos que utilicemos. Vemos que esta recta asciende de izquierda a derecha y tiene pendiente positiva. Si una recta desciende de izquierda a derecha tendrá pendiente negativa.

Intentar lo siguiente

Calcular la pendiente de la recta que contiene a cada par de puntos.

a) (1, 1) y (12, 14) b) (3, 9) y (4, 10) c) (0, –4) y (5, 7) d) (7, 2) y (6, 3)

III.2.4.1.4 Ecuación Punto – Pendiente de una Recta

Si conocemos la pendiente de una recta y las coordenadas de un punto sobre la recta podemos encontrar una ecuación para la misma.

Teorema
La ecuación punto – pendiente
Una recta que pasa por (x_1, y_1) con pendiente m tiene por ecuación $(y - y_1) = m\,(x - x_1)$.

Ejemplo 1: Encontrar la ecuación de la recta que pasa por (1/2, –1) con pendiente 5.

Solución. $(y - y_1) = m\,(x - x_1)$

$y - (-1) = 5\,(x - 1/2)$ Sustituyendo

$y + 1 = 5\,(x - 1/2)$

$y = 5\,x - 7/2$ Simplificando

Ejemplo 2: Encontrar la ecuación de la recta que tiene ordenada al origen de 4 y pendiente 3.

Solución. $(y - y_1) = m\,(x - x_1)$

$y - 4 = 3\,(x - 0)$ Sustituyendo

$y = 3\,x + 4$ Simplificando

Intentar lo siguiente

a) Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto (–2, 4) con pendiente – 3.
b) Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto (–4, –10) con pendiente 1/4.
c) Encontrar la ecuación de la recta cuya abscisa al origen es 5 y pendiente – 1/2.

III.2.4.1.5 Ecuación de la Recta que Pasa por Dos Puntos

Dados dos puntos, podemos encontrar la ecuación de la recta que pasa por ellos. Si encontramos la pendiente de la recta dividiendo el cambio en *y* por el cambio en *x*, y sustituimos este valor por *m* en la ecuación punto – pendiente, obtenemos la **ecuación de los dos puntos**.

Teorema
Ecuación de los dos puntos
La ecuación de cualquier recta no vertical que pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) se calcula con la fórmula

$$(y - y_1) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,(x - x_1).$$

Ejemplo 1: Encontrar la ecuación de la recta que pasa por los puntos (2, 3) y (1, –4).

Solución. Primero encontramos la pendiente y después sustituimos en la fórmula los dos puntos. Tomamos (2, 3) como (x_1, y_1) y (1, –4) como (x_2, y_2).

$$y - 3 = \frac{-4 - 3}{1 - 2}\,(x - 2) \qquad \text{Sustituyendo}$$

$$y - 3 = \frac{-7}{-1}\,(x - 2)$$

$$y - 3 = 7\,(x - 2)$$

$$y - 3 = 7\,x - 14$$

$$y = 7\,x - 11$$

Podríamos haber tomado (1, –4) como (x_1, y_1) y (2, 3) como (x_2, y_2) y haber obtenido la misma ecuación.

$$y - (-4) = \frac{3 - (-4)}{2 - 1}\,(x - 1) \qquad \text{simplificando} \qquad y = 7\,x - 11$$

Intentar lo siguiente

Encontrar la ecuación de la recta que pasa por los puntos señalados:

a) (1, 4) y (3, –2) b) (3, –6) y (0, 4)

III.2.4.2 Representación Gráfica de un Polinomio tipo: $a\,x^2 + b\,x + c$

Definición
Todo polinomio de segundo grado de la forma $a\,x^2 + b\,x + c = 0$, donde *a, b* y *c* son constantes y $a \neq 0$, se llama **forma estándar** de la ecuación cuadrática.

III.2.4.2.1 Solución de Ecuaciones Utilizando la Fórmula Cuadrática

A continuación mostramos una fórmula que proporciona las soluciones de cualquier ecuación cuadrática.

Teorema
La fórmula cuadrática
Las soluciones de cualquier ecuación de segundo grado, $a\,x^2 + b\,x + c = 0$, están dadas por la **fórmula cuadrática**.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ejemplo 1: Resolver $3\,x^2 + 5\,x = -1$.
Solución: Primero hay que encontrar la forma estándar y determinar a, b y c.

$$3\,x^2 + 5\,x + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad a = 3, \; b = 5, \; c = 1$$

Después, hay que utilizar la fórmula cuadrática.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \rightarrow \quad x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4\cdot 3\cdot 1}}{2\cdot 3}$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 12}}{6} = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{6}$$

Las soluciones son $x = \dfrac{-5 + \sqrt{13}}{6}$ y $x = \dfrac{-5 - \sqrt{13}}{6}$

Cuando se utiliza la fórmula cuadrática, las soluciones que se obtienen son soluciones de la ecuación original a menos que se haya cometido un error de cálculo.

Intentar lo siguiente
Resolver utilizando la fórmula cuadrática: a) $3\,x^2 + 2\,x = 7$ b) $5\,x^2 + 3\,x = 9$

III.2.4.2.2 Discriminante

La expresión $b^2 - 4ac$ de la fórmula cuadrática se llama **discriminante**. Con este número podemos determinar la naturaleza de las soluciones o raíces de una ecuación cuadrática.

Teorema
Una ecuación $a\,x^2 + b\,x + c = 0$, con $a \neq 0$ y coeficientes reales, tiene
a) Exactamente una raíz real si $b^2 + 4ac = 0$.
b) Dos raíces reales si $b^2 + 4ac > 0$.
c) Dos raíces complejas, mas no reales, que son conjugadas entre sí cuando $b^2 + 4ac < 0$.

Ejemplo 1: Determinar la naturaleza de las raíces de $9\,x^2 - 12\,x + 4 = 0$

Solución. $a = 9$, $b = -12$ y $c = 4$

Calculamos el discriminante

$$b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 4 = 144 - 144 = 0$$

Solo hay una raíz y ésta es un número real.

Ejemplo 2: Determinar la naturaleza de las raíces de $x^2 + 5\,x + 8 = 0$

Solución. $a = 1$, $b = 5$ y $c = 8$

Calculamos el discriminante

$$b^2 - 4ac = (5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = 25 - 32 = -7$$

En vista que el discriminante es negativo, la ecuación no tiene raíces reales. Sus raíces son complejas y conjugadas entre sí.

Ejemplo 3: Determinar la naturaleza de las raíces de $x^2 + 5\,x + 6 = 0$

Solución. $a = 1$, $b = 5$ y $c = 6$

Calculamos el discriminante

$$b^2 - 4ac = (5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1$$

Como el discriminante es positivo, hay dos raíces reales distintas entre sí.

Intentar lo siguiente

Determinar la naturaleza de las raíces de cada ecuación

a) $x^2 + 5\,x - 3 = 0$ b) $9\,x^2 - 6\,x + 1 = 0$ c) $3\,x^2 - 2\,x + 1 = 0$

III.2.4.2.3 Vértice de la función cuadrática.

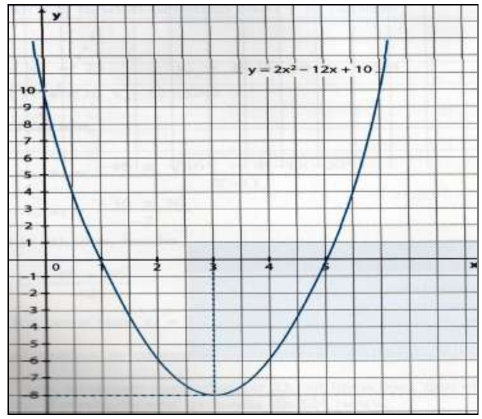
Con las expresiones $x_v = -\,b\,/\,2.a$ y $y_v = f(x_v)$ podemos determinar el vértice de la ecuación cuadrática.

Ejemplo: $y = 2x^2 - 12x + 10$

Vértice: $x_v = \dfrac{-(-12)}{2 \times 2} = 3 \qquad y_v = f(3) = -8$

Ceros de la función: $x_1 = 5$ y $x_2 = 1$ estos valores se hallan utilizando la fórmula cuadrática.

La ordenada al origen: 10.



III.2.4.3 Revisión de Gráficas de Funciones Polinómicas

Considérense las siguientes funciones polinómicas

$f_1(x) = 2x - 4 \qquad f_2(x) = -5x^2 + 20x - 20$

$f_3(x) = 4x^2 + 2x^3 - 6x \qquad f_4(x) = x^4 - x^3 - 6x$

Las dos primeras son funciones polinómicas conocidas, podemos anticipar que sus gráficas serán una recta y una parábola, respectivamente. En general, para obtener algunos puntos que permitan bosquejar las gráficas de las funciones polinómicas se deberán asignar distintos valores a la variable "x", calcular sus correspondientes imágenes y luego representar en un sistema de ejes cartesianos los puntos de coordenadas $(x_i, f(x_i))$.

¿Cuántos valores se necesitarán?. ¿Qué valores deberán asignarse a "x"?.

En búsqueda de respuesta a estas cuestiones consideremos lo siguiente:

- Existen en el gráfico puntos de especial interés, ellos son los puntos de corte con los ejes coordenados. Sobre el punto de corte con el eje vertical existe información explícita en la expresión de la función polinómica; en efecto el término a_0, ordenada al origen[1], indica el valor que asume la función polinómica cuando $x = 0$. Así, para las funciones dadas las ordenadas al origen serán:

	$f_1(x) = 2x - 5$	$f_2(x) = -5x^2 + 20x - 20$	$f_2(x) = 4x^2 + 2x^3 - 6x$	$f_4(x) = x^4 - 4x^2$
Ordenada al origen	-5	-20	0	0

- Averiguar acerca del punto de corte con el eje horizontal, la abscisa al origen, implica averiguar para qué valor de x la función polinómica se anula, es decir, encontrar las raíces[2] de la ecuación $f_i(x) = 0$. Estas raíces se pueden obtener fácilmente a partir de la factorización de la función polinómica y de la determinación de los valores de x que anulan a cada uno de los factores.

[1] Por tratarse de la ordenada del punto de abscisa cero.
[2] Valores de x que satisfacen las igualdades planteadas.

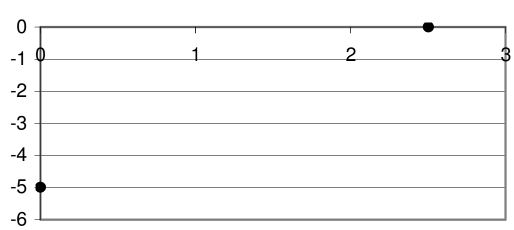
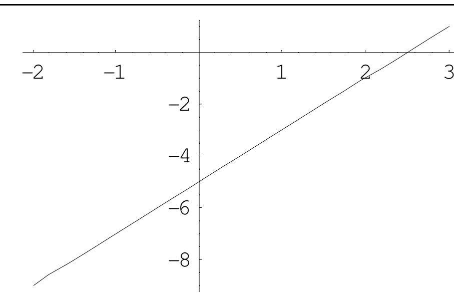
Los pasos para la obtención de las raíces de las funciones polinómicas consideradas se consignan en la siguiente tabla:

Función polinómica	Ecuación para hallar los ceros de $f_i(x)$	Expresiones equivalentes	Ceros de la función o Raíces de la ecuación
$f_1(x) = 2x - 5$	$2x - 5 = 0$	$2.\left(x - \frac{5}{2}\right) = 0$	$\frac{5}{2}$
$f_2(x) = -5x^2 + 20x - 20$	$-5x^2 + 20x - 20 = 0$	$-5.\left(x^2 - 4x + 4\right) = 0 \Leftrightarrow$ $-5.(x-2)^2 = 0$	2 (raíz doble)
$f_3(x) = 2x^3 + 4x^2 - 6x$	$2x^3 + 4x^2 - 6x = 0$	$2x.\left(x^2 + 2x - 3\right) = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2x.(x-1).(x+3) = 0$	0, 1 y –3
$f_4(x) = x^4 - 4x^2$	$x^4 - 4x^2 = 0$	$x^2.\left(x^2 - 4\right) = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x^2.(x-2).(x+2) = 0$	0 (raíz doble), −2 y 2

Factorizar las funciones polinómicas 1, 2 y 4 resultó sencillo debido a que una vez extraído el factor común los polinomios obtenidos eran: un binomio, un trinomio cuadrado perfecto o una diferencia de cuadrados, por lo tanto fue posible recurrir a las técnicas de factoreo conocidas. Para la función polinómica 3 se recurrió al teorema del factor, encontrando el valor de **c** que anula al polinomio en cada caso, por "ensayo y error".

Obtenidos los puntos de corte con los ejes coordenados, se tendrán los primeros puntos para graficar.

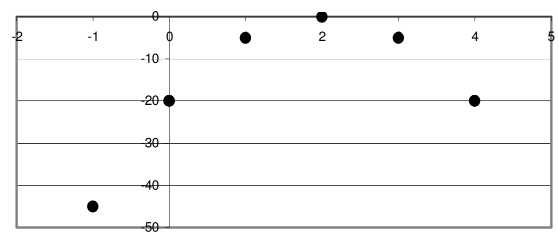
Para el caso de la función polinómica de grado uno, a partir de estos dos únicos puntos será posible determinar la recta correspondiente.

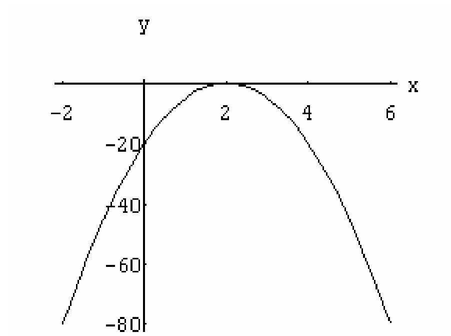
Algunos puntos que permiten bosquejar la gráfica	Gráfica de la función polinómica
$f_1(x) = 2x - 5$	
	

En el caso de las restantes funciones polinómicas, los puntos de corte con los ejes coordenados serán dos o más puntos por los que pasará la gráfica de la función.

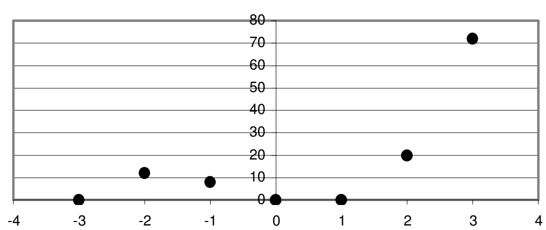
Para obtener otros puntos que permitan bosquejar la gráfica se deberán asignar nuevos valores a la variable “x”, tomando como referencia los puntos de corte con el eje horizontal, y calcular sus correspondientes imágenes. Estos puntos obtenidos darán idea de cómo será la gráfica, como se muestra a continuación:

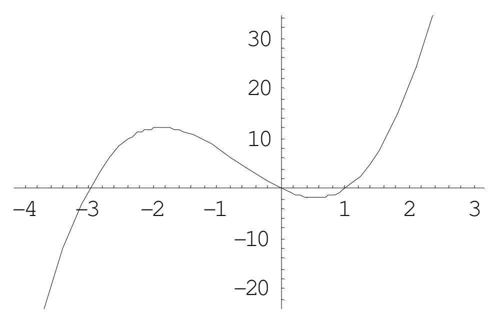
$$f_2(x) = -5x^2 + 20x - 20$$



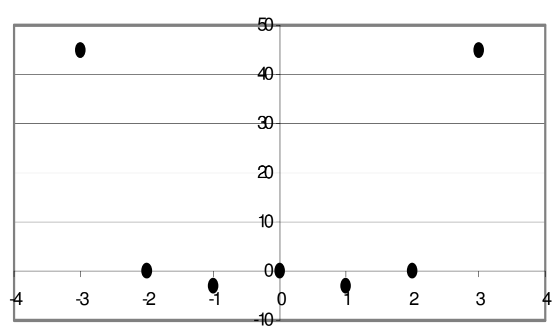


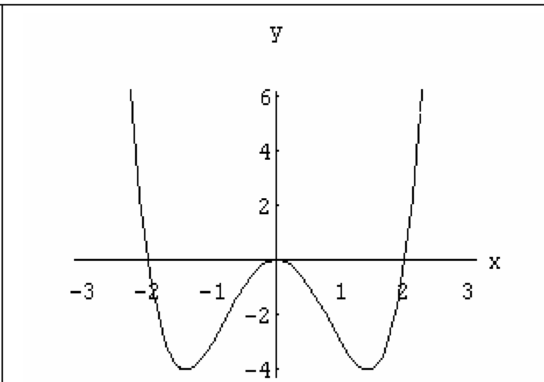
$$f_3(x) = 2x^3 + 4x^2 - 6x$$





$$f_4(x) = x^4 - 4x^2$$





Intentar lo siguiente

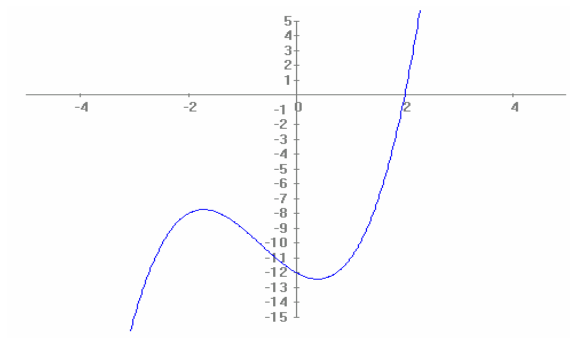
Utilizando la raíz y el término a_0, graficar los siguientes funciones polinómicas de primer y de segundo grado.

a) $\mathbf{P}(x) = -3x + 1$ b) $\mathbf{P}(x) = \frac{1}{2}x + 5$

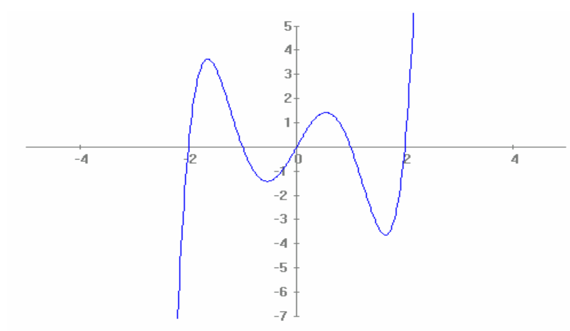
c) $\mathbf{P}(x) = -3x^2 + 27$ d) $\mathbf{P}(x) = 3x^2 + 3x - 18$

A partir de las gráficas de las funciones polinómicas dadas a continuación determinar las raíces reales y utilizarlas para iniciar la factorización de la función dada. ¿Qué se puede decir de las restantes raíces son reales o complejas?. ¿Alguna de ellas será una raíz múltiple?. **Justifique.**

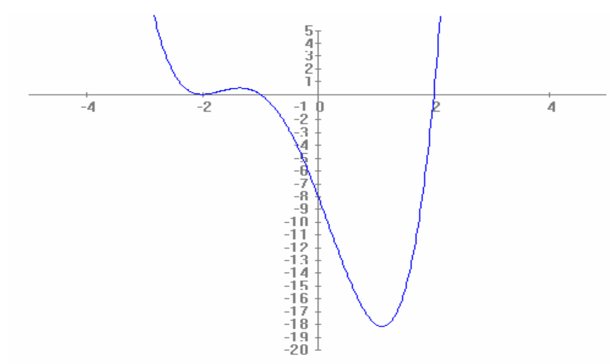
$$f_1(x) = x^3 + 2x^2 - 2x - 12$$



$$f_2(x) = x^5 - 5x^3 + 4x$$



$$f_3(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 12x - 8$$



III.2.5 APLICACIONES DEL FACTOREO

III.2.5.1 Simplificación de Expresiones racionales

El cociente de dos polinomios $\mathrm{P}(x)$ y $\mathrm{Q}(x)$ se denomina expresión racional. Si estos polinomios tienen en común algún factor entonces es posible simplificarlo y escribir $\dfrac{\mathrm{P}(x)}{\mathrm{Q}(x)}$ en forma más sencilla.

Por ejemplo en la expresión $\dfrac{x^2-5x-6}{x^3+1}$ se tiene que $x = -1$ es raíz del numerador y del denominador. Así ambos podrán ser escritos como producto donde uno de los factores será $x-(-1)$, es decir $x + 1$:

$$\frac{x^2-5x-6}{x^3+1}=\frac{(x+1)(x-6)}{(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{x-6}{x^2-x+1}$$

El numerador tiene una raíz $x = 6$ y el denominador tiene raíces complejas conjugadas. Como no comparten raíces, carecen de factores comunes y no es posible simplificar más la última expresión. Finalmente se obtiene que

$$\frac{x^2-5x-6}{x^3+1}=\frac{x-6}{x^2-x+1} \quad \text{para} \quad x \neq -1$$

Nota: La condición $x \neq -1$ debe ser considerada porque las expresiones en ambos miembros son equivalentes para cualquier valor de x excepto para $x = -1$, donde la expresión original no está definida.

Intentar lo siguiente

Simplificar las siguientes expresiones racionales.

a) $\dfrac{x^2+6x+5}{x^2-x-2}$ b) $\dfrac{2x^3-x^2-2x+1}{x^2-1}$

III.2.6 TRABAJO PRÁCTICO: FUNCIONES POLINÓMICAS

1. Dados los siguientes polinomios:

   $\mathbf{P}(x) = 4x^3 + x^2 - 2x - 13$ $\quad$ $\mathbf{Q}(x) = 2x^2 + 3x + 9$ $\quad$ $\mathbf{R}(x) = -x^3 + 2$

   $\mathbf{S}(x) = x - 5$ $\quad$ $\mathbf{T}(x) = 2x^2$

Encontrar:

   a) $3.\mathbf{Q}(x)$ $\quad$ e) $\mathbf{S}(x).\mathbf{R}(x)$ $\quad$ i) $\mathbf{T}(x).\mathbf{Q}(x)$

   b) $-5.\mathbf{S}(x)$ $\quad$ f) $\mathbf{T}(x).\mathbf{R}(x)$ $\quad$ j) $\mathbf{Q}(x).\mathbf{R}(x)$

   c) $\mathbf{P}(x) + \mathbf{Q}(x)$ $\quad$ g) $\mathbf{P}(x) + 4.\mathbf{R}(x)$ $\quad$ k) $\mathbf{T}(x).\mathbf{S}(x).\mathbf{R}(x)$

   d) $\mathbf{Q}(x) + \mathbf{R}(x)$ $\quad$ h) $\mathbf{Q}(x) - \mathbf{P}(x)$ $\quad$ l) $(\mathbf{S}(x))^2$

2. Dados los siguientes polinomios:
   i) Predecir el grado de cada uno de ellos.
   ii) Reducirlos a su mínima expresión.

   a) $\mathbf{P}(x) = 7x - (3 - x) - 2x$ $\quad$ f) $\mathbf{P}(x) = 2x^2.(2x + 1 - 10x^2)$

   b) $\mathbf{P}(x) = (7x + 5) - (2x + 3)$ $\quad$ g) $\mathbf{P}(x) = (\sqrt{x} - 10).(\sqrt{x} + 10)$

   c) $\mathbf{P}(x) = (x + 2).(x - 2)$ $\quad$ h)$\mathbf{P}(x) = (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) - (x^2 + 2x + 1)$

   d) $\mathbf{P}(x) = (3 - 5x).(3 + 5x)$ $\quad$ i) $\mathbf{P}(x) = (\sqrt{x} - \sqrt{2}).(\sqrt{x} + \sqrt{2}) + 1$

   e) $\mathbf{P}(x) = (-2x - 3).(3x + 6)$ $\quad$ j) $\mathbf{P}(x) = (x + 3).(2x + 2) - (6x + 10)$

3. i) Use el algoritmo de la división para encontrar el cociente y el resto de las siguientes divisiones entre polinomios.

   a) $(8x^4 - 8x^2 + 6x + 6) : (2x^2 - x)$ $\quad$ d) $(x^3 + 9x^2 - 3x - 1) : (2x - 1)$

   b) $(x^3 - x^2 + 7) : (x - 1)$ $\quad$ e) $(5x + 2x^3 - 3) : (x + 2)$

   c) $(-8x^5 + 10x^4 - 8x^3 - 11x^2 + 17x + 9) : (2x^2 + 3x + 1)$ $\quad$ f) $(x^3 + 4x^2 + 3x - 2) : (x + 2)$

   ii) Verifique cada resultado teniendo en cuenta la relación entre dividendo, divisor, cociente y resto. $(\mathbf{P}(x) = \mathbf{Q}(x).\mathbf{C}(x) + \mathbf{R}(x))$.

   iii) Escribir el resultado de las divisiones dadas teniendo en cuenta que $\dfrac{\mathbf{P}(x)}{\mathbf{Q}(x)} = \mathbf{C}(x) + \dfrac{\mathbf{R}(x)}{\mathbf{Q}(x)}$.

4. Se dan los siguientes polinomios

   $\mathrm{P}(x) = -x^2 - 6x + 4$ $\quad$ $\mathrm{Q}(x) = x - 1$ $\quad$ $\mathrm{R}(x) = x^2 + 6x - 4$ $\quad$ $\mathrm{S}(x) = 4 - x^2$

   Se pide, obtener mediante operaciones entre los mismos, un polinomio con las características indicadas en cada caso.

   a) De dos términos. $\quad$ b) De grado 3.
   c) De grado 5. $\quad$ d) Nulo.
   e) Sea un monomio en "x" con coeficiente positivo. $\quad$ f) Sea un cuatrinomio de 3^{er} grado.

5. Dadas las siguientes divisiones:

a) $(x^4+x^3-2x^2+3x-1):(x-2)$

b) $(x^5-32):(x-2)$

c) $(-2x^4+x^2+4):(x+3)$

d) $(\frac{1}{8}-x^3):\left(x-\frac{1}{2}\right)$

e) $(x^4-3x^3+7x^2-2x+1):(x+2)$

i) Utilizar el Teorema del Resto para establecer si el polinomio dividendo es divisible por el polinomio divisor.
ii) Cuando sea posible, factorearlo en término del divisor, aplicando la regla de Ruffini para encontrar el cociente.

6. Factorear el polinomio $\mathbf{P}(x)$ extrayendo como factor común el indicado en cada caso.

i) $\mathbf{P}(x)=4x^5+2x^2-10x^6+20x^3$ a) $\frac{1}{2}x$ b) $4x^2$ c) $5x^4$

7. Teniendo en cuenta que: "Un polinomio $\mathbf{P}(x)$ tiene un factor x − c, si y sólo si: P(c) = 0" (Teorema del factor).
i) Establecer si el binomio dado $x-$ c es un factor del polinomio P(x). Si lo es, factorice P(x)

a) $\mathbf{P}(x)=x^3+6x^2+11x+6;$ $x+1$

b) $\mathbf{P}(x)=x^3+5x^2-2x-24;$ $x-3$

c) $\mathbf{P}(x)=-x^3+7x+6;$ $x+2$

d) $\mathbf{P}(x)=x^3-6x^2+11x-6;$ $x-1$

ii) Establecer si existe un factor " x − c " para los siguientes binomios. En caso afirmativo, factorizar los binomios dados en término del factor encontrado

a) x^2+4
b) x^2-4
c) x^2-1
d) $\frac{1}{8}-x^3$
e) $2+x^3$
f) x^5-32
g) x^2-5
h) $16x^2-9$
i) $2-x^3$
j) x^4-3

8. i) Para cada polinomio de *segundo grado*, encontrar los factores $x-$ c.

a) $\mathbf{P}(x)=-x^2+2x-3x+6$

b) $\mathbf{P}(x)=\frac{1}{2}x^2$

c) $\mathbf{P}(x)=2x^2-2x-4$

d) $\mathbf{P}(x)=-x^2$

e) $\mathbf{P}(x)=-x^2+4$

f) $\mathbf{P}(x)=x^2-1$

g) $\mathbf{P}(x)=x^2+4x+4$

h) $\mathbf{P}(x)=-\frac{1}{3}x^2+2x-3$

i) $\mathbf{P}(x)=x^2-6x+9$

ii) Factorear los polinomios dados en término de uno de los factores encontrados.
iii) Escribir los polinomios dados como producto de sus factores.
iv) Dar la expresión general de la forma factoreada del polinomio de segundo grado.

9. Dadas las siguientes funciones polinómicas:

$\mathbf{P}(x) = 2x - 4$ $\quad\quad$ $\mathbf{Q}(x) = 4x^2 + 2x^3 - 6x$ $\quad\quad$ $\mathbf{R}(x) = -6 - 3x + 3x^2$

$\mathbf{S}(x) = x^4 - x^3 - 6x$ $\quad\quad$ $\mathbf{T}(x) = 5 - x$

i) Indicar el grado de cada una de ellas y determinar los coeficientes de los términos de grado cero, uno, dos y cuatro.

ii) Encontrar el valor de la función polinómica para los valores de "x" que se indican:
$x_1 = 0$ $\quad$ $x_2 = 3$ $\quad$ $x_3 = -3$ $\quad$ $x_4 = 1$ $\quad$ $x_5 = -2$ $\quad$ $x_6 = 4$ $\quad$ $x_7 = -1$

iii) Ubicar algunos puntos $(x_i, \mathbf{P}(x_i))$ en un sistema de ejes cartesianos e indicar en cuáles de las funciones polinómicas es posible anticipar su gráfico.

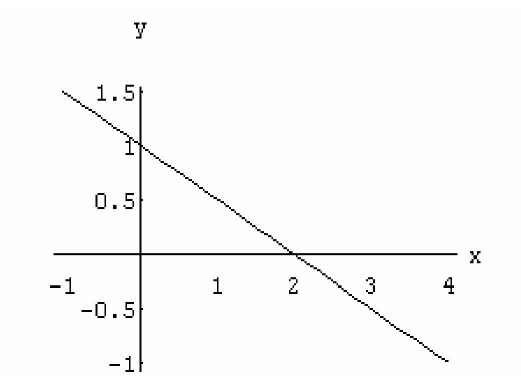
10. Sabiendo que la forma general de la función polinómica es:

$$\mathrm{P}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \,.$$

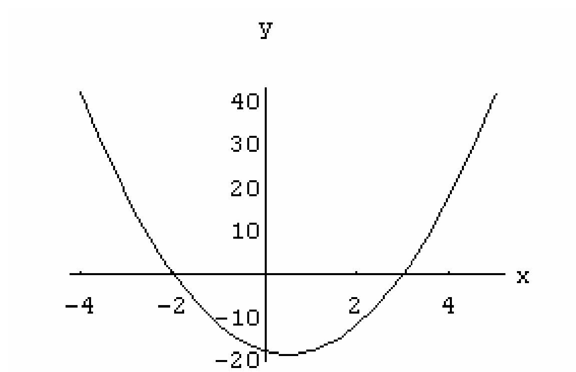
i) Determinar a partir del gráfico:
   a) el valor de "a_0" y completarla.
   b) las raíces reales de cada función polinómica.

ii) Verificar las raíces halladas, resolviendo las ecuaciones P(x) = 0, a partir de la factorización de las funciones polinómicas dadas. Individualizar las raíces múltiples.

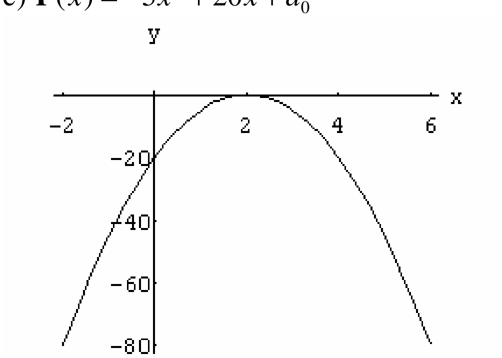
a) $\mathbf{P}(x) = -\dfrac{1}{2}x + a_0$



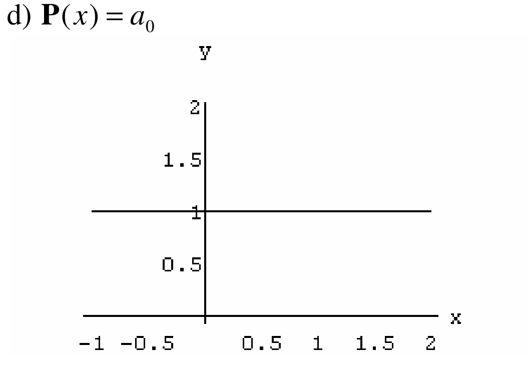
b) $\mathbf{P}(x) = 3x^2 - 3x + a_0$



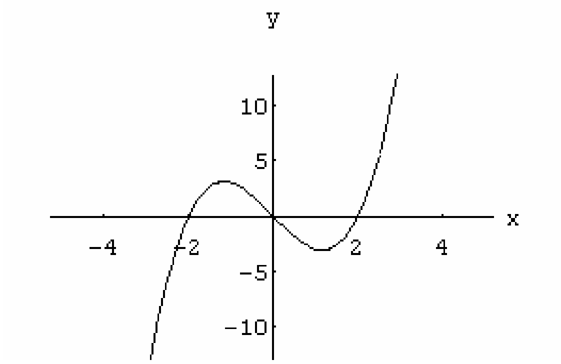
c) $\mathbf{P}(x) = -5x^2 + 20x + a_0$



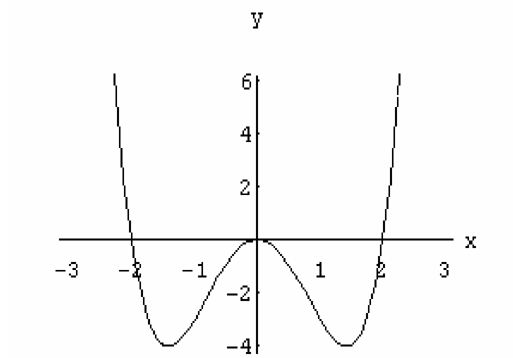
d) $\mathbf{P}(x) = a_0$



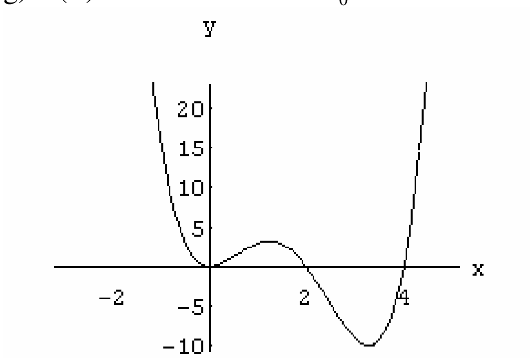
e) $\mathbf{P}(x) = x^3 - 4x + a_0$



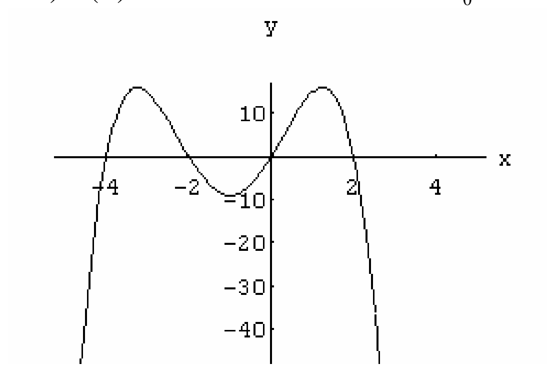
f) $\mathbf{P}(x) = x^4 - 4x^2 + a_0$



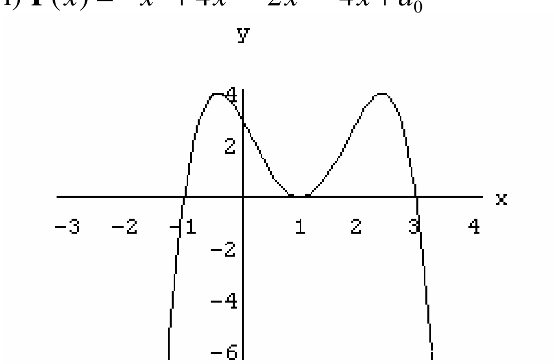
g) $\mathbf{P}(x) = x^4 - 6x^3 + 8x^2 + a_0$



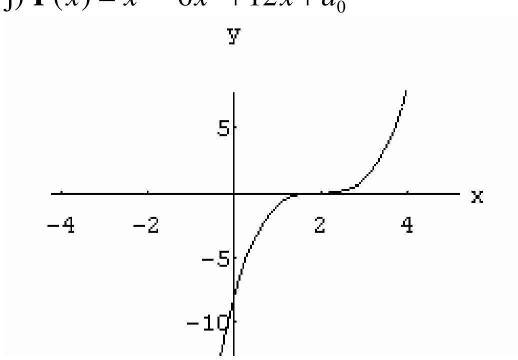
h) $\mathbf{P}(x) = -x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 16x + a_0$



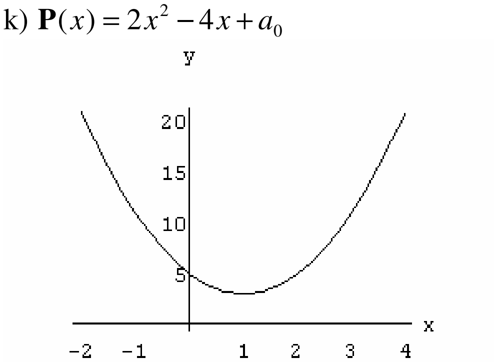
i) $\mathbf{P}(x) = -x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 4x + a_0$



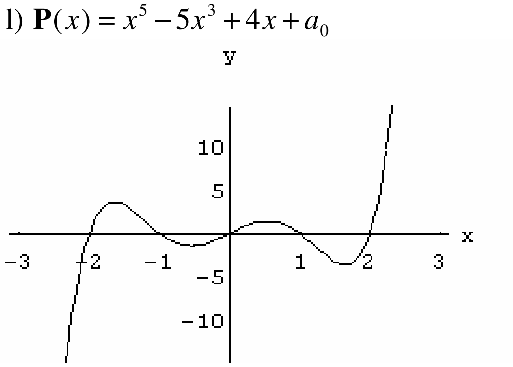
j) $\mathbf{P}(x) = x^3 - 6x^2 + 12x + a_0$



k) $\mathbf{P}(x) = 2x^2 - 4x + a_0$



l) $\mathbf{P}(x) = x^5 - 5x^3 + 4x + a_0$



11. i) Utilizando la raíz y el término a_0, graficar los siguientes funciones polinómicas de primer grado.

a) $\mathbf{P}(x) = -x + 3$

b) $\mathbf{P}(x) = x + \frac{2}{3}$

c) $\mathbf{P}(x) = -\frac{4}{3}x + 4$

d) $\mathbf{P}(x) = -4x$

ii) Graficar las funciones polinómicas del ejercicio 8 indicando las raíces, ordenada al origen y las coordenadas del vértice.

12. Graficar las siguientes funciones polinómicas de segundo grado cuyas raíces son números complejos:

a) $\mathbf{P}(x) = x^2 + 1$

b) $\mathbf{P}(x) = x^2 - 4x + 5$

c) $\mathbf{P}(x) = -x^2 - 4$

d) $\mathbf{P}(x) = x^2 + 2x + 10$

13. Simplificar las siguientes expresiones racionales.

a) $\dfrac{x^2}{x^2 + 2x}$

b) $\dfrac{n^2 - 1}{n^3 - n^2 + n - 1}$

c) $\dfrac{3x^2 + x - 10}{5x - 3x^2}$

d) $\dfrac{x^2 - 5x}{5 - x}$

e) $\dfrac{x^3 - x}{x^3 - 2x^2 + x}$

f) $\dfrac{9y^2 + 12y^8 - 15y^6}{3y^3}$

g) $\dfrac{2x + 4}{x^3 + 5x^2 - 2x - 24}$

h) $\dfrac{3x^2 + 3x - 6}{2x^2 + 6x + 4}$

i) $\dfrac{8 - x^3}{x^2 - x}$

j) $\dfrac{-6a^3 + 9a^6 - 12a^9}{-2a^3}$

k) $\dfrac{4x^2 + 12x + 9}{4x^2 - 9}$

l) $\dfrac{2x^3 + x^2 - 3x + 1}{2x - 1}$

m) $\dfrac{n - 1}{n^2 - 1}$